

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. А. Поляков, Ф. Г. Лялина, Р. Г. Игнатов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Под общей редакцией проф., д-ра техн. наук А. А. Полякова

*Издание второе
Переработанное и дополненное*

*Допущено Уральским отделением Учебно – методического объединения
вузов РФ по образованию в области строительства в качестве учебного
пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров 08.03.01
«Строительство» и по специальности 08.05.01 «Строительство
уникальных зданий и сооружений».*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

УДК 624.04.2(075.8)
ББК 30.121я73
П54

Рецензенты:

И. Г. Емельянов доктор технических наук, профессор (главный научный сотрудник института машиноведения УрО РАН);
кафедра конструкций, зданий и сооружений Уральской государственной архитектурно-художественной Академии (заведующий кафедрой, профессор, кандидат архитектуры **Е.А. Голубева**).

Поляков, А. А.

П54 Строительная механика: учебное пособие / А. А. Поляков, Ф. Г. Лялина, Р. Г. Игнатов. Под общ. редакцией А. А. Полякова. – Екатеринбург : УрФУ, 2016. – 452 с.
ISBN 978-5-8295-0460-1

Настоящее учебное пособие является 2-м изданием (1-е издание вышло в 2014 г.). По сравнению с предыдущим изданием в него внесены изменения и дополнения, способствующие более качественному изучению материала.

В учебном пособии приводятся краткие теоретические сведения, а также методы расчета стержневых конструкций на статические, подвижные, динамические нагрузки, устойчивость. Рассматриваются неразрезные многопролетные балки, фермы, рамы, шпренгельные балки и арки, как статически определимые, так и неопределимые системы. Подробно излагаются разделы, связанные с расчетом на устойчивость рамных и балочных конструкций и их собственных и вынужденных колебаний с конечным числом степеней свободы, а также основы расчета методом конечных элементов.

Учебное пособие соответствует требованиям государственных общеобразовательных стандартов, программе Министерства образования РФ по строительной механике для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 08.03.01 «Строительство» и специальности 08.05.01

«Строительство уникальных зданий и сооружений» всех форм обучения. Может быть полезно студентам, магистрантам, аспирантам, инженерам строительных и других специальностей.

Библиогр.: 16 назв. Рис. 573. Табл. 4. Прил. 1.

УДК 621.7.014.2(075.8)
ББК 30.121я73

ISBN 978-5-8295-0460-1

© Поляков, А.А., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ	7
2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ	18
2.1. Основные понятия простых и многопролетных балок	18
2.2. Расчет многопролетной шарнирной балки	19
3. РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ	26
3.1. Понятие линий влияния	26
3.2. Построение линий влияния для балки на двух опорах	27
3.3. Построение линий влияния в консольной балке	31
3.4. Построение линий влияния для двухопорной балки с консолями	32
3.5. Построение линий влияния для многопролетной шарнирной балки	34
3.6. Определение с помощью ЛВ усилий от заданной неподвижной нагрузки	35
4. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ	40
4.1. Понятие ферм	40
4.2. Кинематический и статический анализы ферм	43
4.3. Примеры кинематического анализа ферм	44
4.4. Определение усилий в стержнях ферм	45
4.5. Линии влияния в стержнях ферм	56
4.6. Определение перемещений в фермах	63
4.7. Квазиоптимальное проектирование ферм	66
5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ	69
5.1. Основные понятия	69
5.2. Определение внутренних усилий в элементах рам	72
5.3. Простейшие рамы	73
5.4. Расчет составных рам	86
5.5. Приемы разбиения сложных рам на составляющие	99
6. РАСЧЕТ АРОК	116
6.1. Основные сведения	116
6.2. Геометрические характеристики арок	117
6.3. Определение реакций опор в арке	118
7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	126
7.1. Понятие статически неопределимых систем	126
7.2. Определение степени статической неопределимости в стержневых системах	128
7.3. Сущность метода сил	132
7.4. Расчет статически неопределимой неразрезной балки методом сил ..	142
7.5. Расчет статически неопределимой фермы по методу сил	148
7.6. Расчет статически неопределимых шпренгельных балок	154
7.7. Некоторые варианты выбора рациональной основной системы метода сил при расчете рам	163
8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (МП)	184

8.1. Основные понятия.....	184
8.2. Определение реактивных усилий в типовых статически неопределимых балках от единичных перемещений.....	190
8.3. Определение реактивных усилий в типовых балках от внешней нагрузки.....	192
8.4. Расчет неразрезных балок методом перемещений.....	196
8.5. Расчет рам с линейно-неподвижными узлами.....	205
8.6. Расчет рам с линейно подвижными узлами.....	211
8.7. Особенности расчета рам с линейно-подвижными узлами при наличии наклонных стоек	245
8.8. Использование симметрии при расчете симметричных систем.....	268
9. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ.....	278
9.1. Понятие устойчивости	278
9.2. Расчеты устойчивости на основе метода перемещений. Общие положения	278
9.3. Расчеты устойчивости балок и стоек	283
9.4. Расчет рам на устойчивость.....	297
9.5. Рамы с линейно-подвижными узлами.....	319
9.6. Понятие о приближенных методах расчета рам на устойчивость	348
9.7. Рамы с бесконечно-жесткими ригелями.....	353
10. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ УПРУГИХ СИСТЕМ.....	356
10.1. Понятия.....	356
10.2. Собственные колебания системы с одной степенью свободы	359
10.3. Свободные колебания системы с двумя и несколькими степенями свободы.....	372
10.4. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы.....	405
10.5. Расчет рамы, нагруженной вибрационной нагрузкой, на вынужденные колебания.....	413
11. ОСНОВЫ РАСЧЕТА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	420
11.1. Краткое описание метода конечных элементов	421
11.2. Матрицы жесткости метода конечных элементов	424
11.3. Вектор грузовых усилий (реакций) по концам стержней в местной системе координат	428
11.4. Порядок расчета рам	430
11.5. Расчет рам методом конечных элементов с использованием ПК	442
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	451

ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика – наука о расчете в целом инженерных сооружений и конструкций на прочность, жесткость и устойчивость – в этом ее отличие от сопротивления материалов, где рассматриваются отдельные элементы или простейшие конструкции. Строительная механика базируется на математике, физике, теоретической механике, сопротивлении материалов и вместе с этим создает фундамент для изучения специальных профильных дисциплин и расчета сложных современных строительных сооружений, разнообразных конструкций не только в строительной отрасли, но и в горнодобывающей, нефтегазовой, энергетической отраслях, в самолетостроении, кораблестроении и др. Строительная механика как прикладная наука возникла из потребностей строительства, но она непрерывно развивается, совершенствуется, и сегодня она вышла за рамки своего начального предназначения – расчета строительных конструкций. Достижения науки и техники, производства, сферы быта и обслуживания требуют внедрения более совершенных конструкций, сооружений как по дизайну, так и по надежности и экономичности. Внедрение высотных зданий, подземных сооружений, скоростных дорог, транспортных средств, летательных аппаратов, надводных и подводных конструкций, различной космической техники и т. д. требует развития методов расчета и высокой профессиональной инженерной подготовки. Поэтому овладение навыками расчетов, изучаемых в курсе «Строительная механика», весьма важно в инженерии.

Круг задач, изучаемых в строительной механике, широк, и в связи с этим происходит выделение новых разделов, которые практически стали самостоятельными дисциплинами: строительная механика корабля, строительная механика ракетной и космической техники, строительная механика машиностроительных конструкций, строительная механика самолетов, динамика и устойчивость сооружений и конструкций. Естественно, процесс развития строительной механики не закончен, она непрерывно совершенствуется и углубляется. С интенсивным внедрением ЭВМ этот процесс будет преобразовываться еще, т. к. именно строительная механика, базируясь на ЭВМ, позволяет инженеру устанавливать все внутренние силы и деформации в сооружении и таким образом искать рациональные формы конструкции при минимальных затратах. При этом проектант может промоделировать все процессы деформирования конструкции и еще на стадии ее проектирования предусмотреть мероприятия, исключающие возникновение

опасного состояния при эксплуатации. Для обеспечения прочности, устойчивости, жесткости конструкций наиболее важным является определение внутренних усилий, которое и является главной задачей строительной механики. По внутренним усилиям можно определить размеры сечений элементов, оценить прочность, жесткость и устойчивость конструкций.

Строительная механика – это ключ, дающий инженеру возможность создания уникальных надежных конструкций, отличающихся своей легкостью, экономичностью и смелым дизайном.

В данном пособии приведены основы расчета конструкций различных типов на разные виды нагрузок. Материал изложен доступно и научно обоснован. В пособии рассмотрены многочисленные примеры, которые позволят студентам самостоятельно овладеть проверенными практикой методами расчета. Пособие обобщает накопленный десятилетиями опыт кафедры «Строительная механика» УПИ – УрФУ.

Авторы искренне признательны члену-корреспонденту Академии наук СССР Станиславу Андреевичу Рогицкому, профессорам Венедикту Ивановичу Климанову и Виктору Вячеславовичу Рогалевичу, Чупину Владимиру Васильевичу, доцентам Владимиру Владимировичу Чуватову и Ивану Афиногеновичу Егорову за их огромный вклад в создание и развитие направлений кафедры «Строительная механика» УрФУ, которая является известной в Уральском регионе.

Авторы благодарят за помощь в подготовке пособия студентов Строительного института УрФУ: Бисярина Александра Михайловича, Бакова Михаила Антоновича, Гольякова Никиту Кирилловича, Островского Никиту Андреевича, Севостьянова Сергея Александровича, Шиповаленко Евгения Алексеевича и аспиранта Остаточникова Ивана Юрьевича.

Авторы благодарны генеральному директору ООО «Виктория инвест строй» Шварцу Борису Эдуардовичу за поддержку и финансовую помощь в издании учебного пособия.

Также авторы признательны рецензентам: профессорам кафедры «Конструкции, здания и сооружения» кандидату архитектуры Голубевой Екатерине Александровне и кандидату технических наук Годзевич Эльзе Владимировне, (Уральская Государственная архитектурно-художественная Академия); доктору технических наук, профессору Емельянову Игорю Георгиевичу, главному научному сотруднику института машиноведения УрО РАН.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Задачи строительной механики

Строительство различных сооружений (мостов, тоннелей, гидротехнических плотин и др.), а также жилых, общественных и промышленных зданий ведется по проектам, в которых указываются размеры как самого сооружения, так и отдельных его частей. Размеры всех элементов определяются путем расчетов, которые излагаются в курсах:

- сопротивление материалов,
- строительная механика,
- теория упругости,
- теория устойчивости.

Важное место среди них занимает строительная механика, в которой изучаются принципы и методы расчета деформируемых систем, состоящих из стержней, а также из пластин и оболочек. При создании методов расчета в строительной механике широко используются основные принципы теоретической механики и сопротивления материалов.

Целью расчетов, проводимых с помощью методов строительной механики, является определение внутренних усилий в отдельных элементах конструкций, а также перемещений различных точек системы от действующих на сооружение нагрузок. По найденным внутренним усилиям конструкторы определяют требуемые размеры элементов, которые обеспечивают необходимую прочность при наименьшей затрате материала. Найденные перемещения отдельных точек дают представление об изменении формы той или иной системы, т. е. о ее жесткости. Цель расчета на жесткость состоит в том, чтобы не допустить больших перемещений, прогибов, горизонтальных отклонений, обеспечив тем самым требуемые эксплуатационные показатели объекта.

Кроме расчетов на прочность и жесткость проводятся дополнительные расчеты на устойчивость всего сооружения и отдельных его частей, а также изучаются колебания конструкций, чтобы предупредить возникновение резонанса, приводящего иногда к разрушению сооружения.

Таким образом, *строительная механика* есть наука о принципах и методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость при статических и динамических воздействиях.

1.2. Допущения в строительной механике

Основные допущения, принятые в строительной механике для расчета упругих систем, те же, что и в сопротивлении материалов, с той лишь разницей, что они относятся не к отдельному элементу, а ко всему сооружению в целом.

- Материал сооружения обладает совершенной упругостью, т. е. после прекращения действия нагрузки деформации полностью исчезают;
- перемещения точек сооружения малы по сравнению с размерами самого сооружения (расчет сооружений по недеформированной схеме);
- перемещения точек сооружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения (соблюдается закон Р. Гука);
- справедлив принцип независимости действия сил: результат действия на сооружение группы сил не зависит от последовательности нагружения ими сооружений и равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности.

1.3. Понятие расчетной схемы сооружения

Большинство сооружений имеют сложные соединения составляющих их элементов. Расчет такого сооружения как единого целого оказывается весьма сложным. Для расчета прибегают к упрощениям, сознательно отказываясь от целого ряда сравнительно маловажных факторов, и оперируют упрощенными схемами сооружений, называемыми расчетными схемами.

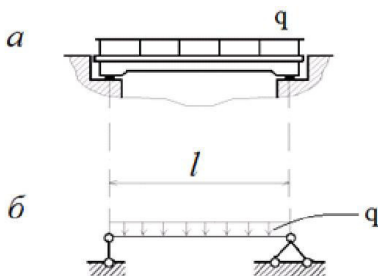


Рис. 1.1

Расчетная схема представляет собой упрощенное изображение действительного сооружения. Выбор расчетной схемы – ответственная задача. Расчетная схема должна позволить сделать расчет сооружения по степени сложности практически приемлемым и в то же время должна обеспечить расчету достаточную достоверность и точность.

В качестве простейшего примера рассмотрим составление расчетной схемы для однопролетного моста, представляющего собой стержневую систему (рис. 1.1, а).

Расчетная схема (рис. 1.1, б) представляет собой простую балку на двух опорах. Вес дорожного покрытия, перил и собственный вес несущих элементов воздействуют на балку в виде распределенной нагрузки с интенсивностью q .

На рис. 1.2, а показан более сложный пример – рамный мост, для которого расчетная схема изображена на рис. 1.2, б.

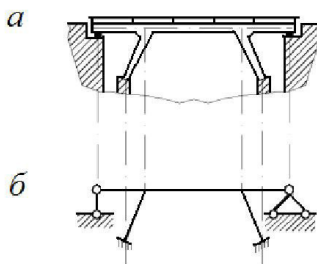


Рис.1.2

На рис. 1.3 показана расчетная схема фермы, в которой отдельные элементы (стержни) соединены между собой в узлах с помощью шарниров. На практике встречаются, главным образом, фермы, у которых стержни жестко скреплены в узлах с помощью сварки, заклепок, болтов. В отдельных случаях, например в железобетонных фермах, узлы изготавливаются одновременно с самими элементами и составляют с ними одно целое. Тем не менее, в расчетных схемах ферм обычно предполагается наличие идеальных шарниров в узлах.

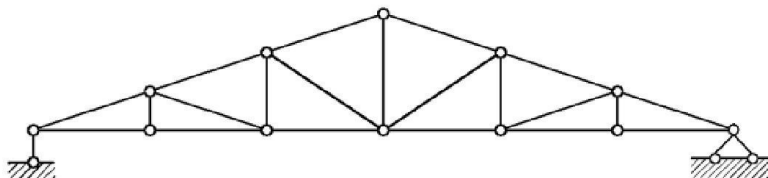


Рис. 1.3

1.4. Классификация расчетных схем

Классифицировать расчетные схемы сооружений можно по следующим признакам:

1. По расположению осей элементов и нагрузок:

- *плоские*, когда все стержни и нагрузки расположены в одной плоскости (рис.1.4);

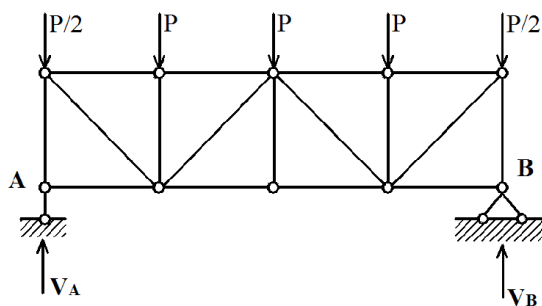


Рис. 1.4

- *пространственные*, когда стержни расположены в разных плоскостях (рис. 1.5, *а*) или когда нагрузки действуют не в плоскости сооружения (рис. 1.5, *б*).

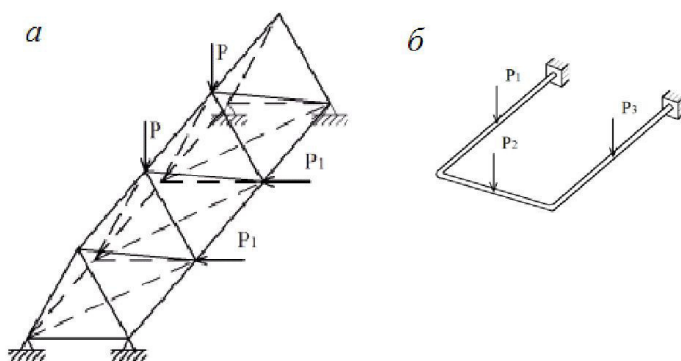


Рис. 1.5

2. По виду элементов, образующих сооружение:

- *стержневые системы* (рис. 1.4, 1.5), которые составлены из элементов, имеющих небольшие размеры поперечных сечений по сравнению с их длиной;

- *тонкостенные сооружения*, составленные из элементов, толщина которых мала по сравнению с другими размерами (рис. 1.6), – это плиты (рис. 1.6, *а*) и оболочки (рис. 1.6, *б*, *в*).

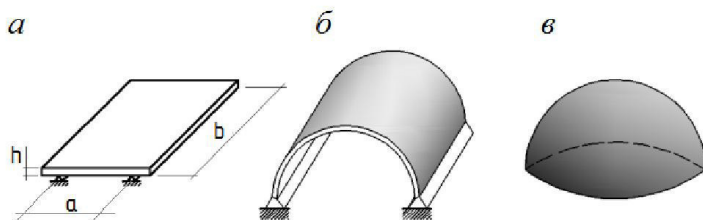


Рис. 1.6

- *массивы* – сооружения, имеющие все размеры одного порядка: массивные фундаменты, подпорные стенки, плотины (рис. 1.7, а, б).

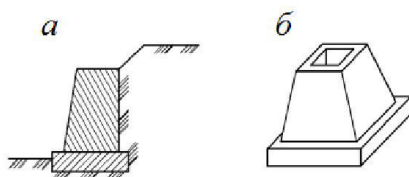


Рис. 1.7

3. По направлению опорных реакций:

- *балочные*, у которых при действии вертикальной нагрузки возникают только вертикальные реакции опор (рис. 1.4);

- *распорные*, в которых при действии вертикальных нагрузок возникают наклонные реакции (рис. 1.8), – это арки (рис. 1.8, а), рамы (рис. 1.8, б) и другие.

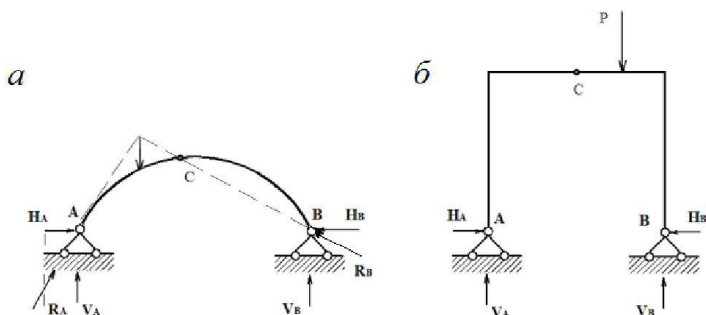


Рис. 1.8

4. В зависимости от методов расчета, расчетная схема может быть:

- *статически определимой*;
- *статически неопределимой*.

5. По кинематическому признаку:

- *геометрически неизменяемые*, изменение формы которых происходит вследствие деформации отдельных элементов (рис. 1.8, *а, б*);
- *мгновенно изменяемые*: такие системы допускают бесконечно малые перемещения без деформации элементов (рис 1.9, *а, б*);
- *геометрически изменяемые*, изменение формы которых происходит без деформации элементов (рис. 1.9, *в*), – механизмы.

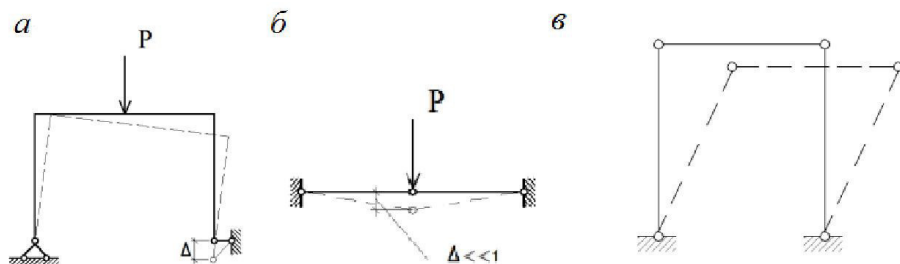


Рис. 1.9

Мгновенно изменяемые и геометрически изменяемые системы не могут быть приняты как расчетные схемы сооружений.

1.5. Кинематический анализ расчетных схем сооружений

Понятие степени свободы сооружения

Число степеней свободы системы равно количеству независимых параметров, определяющих положение элементов системы. Например, точка M на плоскости имеет две степени свободы – координаты x и y (рис. 1.10, *а*), а стержень AB – три степени свободы, т. е. положение прямой AB на плоскости определяется тремя параметрами: координатами точки A x , y – и углом φ (рис. 1.10, *б*).

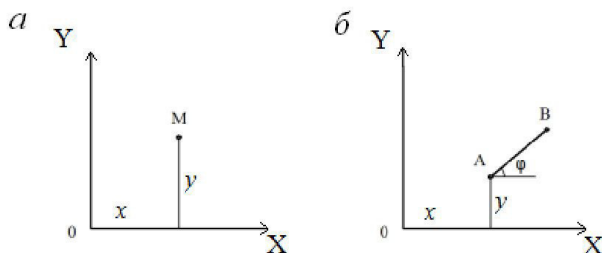


Рис. 1.10

Введем понятие диска. *Диском* называется явно геометрически неизменяемая часть сооружения (расчетной схемы). Диск принято изображать плоской фигурой произвольной формы (рис. 1.11, *а*).

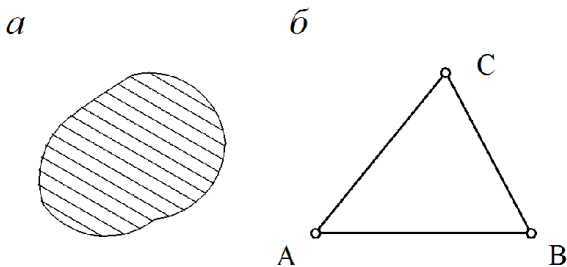


Рис. 1.11

Диском является любой стержень или треугольник, составленный из трех стержней (рис. 1.11, *б*). Установим степень свободы (W) шарнирно-стержневой системы (рис. 1.12). Если бы диски не были соединены шарнирами, то степень свободы была бы $3Д$. Но каждый диск соединен с соседним шарниром, который эквивалентен двум связям. Таким образом, шарниры, соединяющие диски между собой, уменьшают число степеней свободы на $2Ш$.

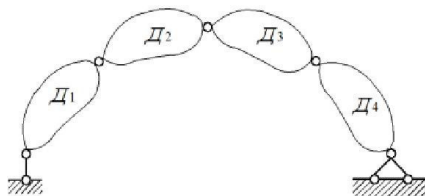


Рис. 1.12

Кроме того, система соединена с опорным диском (землей) тремя опорными стержнями C_0 . Следовательно, число степеней свободы системы, изображенной на рис. 1.12, может быть определено по формуле Чебышева:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0, \quad (1.1)$$

где W – число степеней свободы системы, $Д$ – количество дисков, $Ш$ – число простых одиночных шарниров, C_0 – количество опорных стержней.

Поясним понятия «простой» и «сложный» шарниры. Простой (одиночный) шарнир (рис. 1.13, *а*) соединяет два стержня с возможностью их относительного поворота.

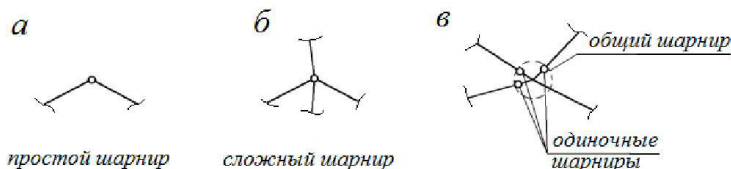


Рис. 1.13

На рис. 1.13, б изображен сложный шарнир, объединяющий четыре диска (стержня). Сложный шарнир, объединяющий n дисков, эквивалентен $(n - 1)$ простому шарниру. Если в узле сходится n стержней, то число одиночных шарниров определяется по формуле $\Pi = C - 1$, где C – количество стержней в узле.

Если $W = 0$, то система геометрически неизменяема.

При $W > 0$ система геометрически изменяема, при $W < 0$ система геометрически неизменяема и имеет лишние связи.

Условие (1.1) является необходимым, но недостаточным признаком геометрической неизменяемости системы.

Рассмотрим расчетные схемы двух ферм (рис. 1.14, а, б). Определим степень свободы той и другой фермы.

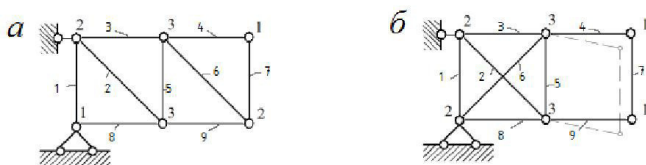


Рис. 1.14

а: $D = 9$, $\Pi = 12$, $C_o = 3$.

$$W = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 12 - 3 = 0.$$

Система геометрически неизменяема.

б: $D = 9$, $\Pi = 12$, $C_o = 3$.

$$W = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 12 - 3 = 0.$$

Но система (б) геометрически изменяема, т. к. содержит шарнирный четырехугольник, который свернется в параллелограмм. Поэтому условие $W = 0$ является необходимым, но недостаточным условием геометрической неизменяемости системы.

Для выявления изменяемости (неизменяемости) системы надо провести структурный анализ расчетной схемы, который основывается на нескольких принципах, приведенных ниже.

Принципы образования геометрически неизменяемой системы

1. Если узел А (рис. 1.15, а) присоединен к диску Д двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, то они образуют геометрически неизменяемую систему.

2. Два диска образуют геометрически неизменяемую систему, если они соединяются тремя стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке (рис. 1.15, б), или шарниром и стержнем; причем ось стержня не проходит через шарнир (рис. 1.15, в).

3. Три диска образуют геометрически неизменяемую систему, если они соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рис 1.15, г)

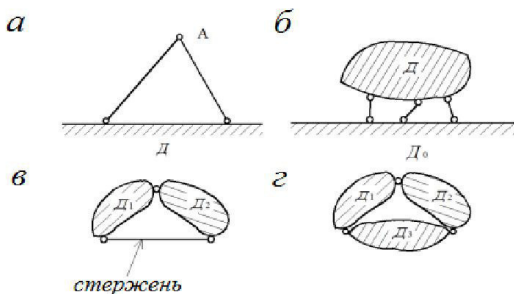


Рис.1.15

Эти принципы применимы для простейших схем. Пока ограничимся ими.

Рассмотрим случай, когда два диска соединены тремя параллельными стержнями (рис.1.16). Диск Д₁ может сместиться по отношению к диску Д₀ без деформации стержней.

Вывод: диски Д₁ и Д₀ образуют изменяемую систему.

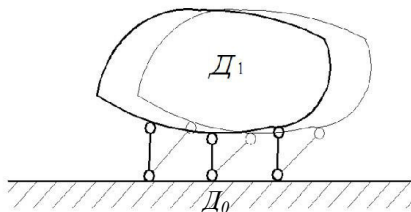


Рис. 1.16

Два диска соединены тремя стержнями, пересекающимися в одной точке O (рис. 1.17). Точка O является мгновенным центром вращения. Такая система является мгновенно изменяемой.

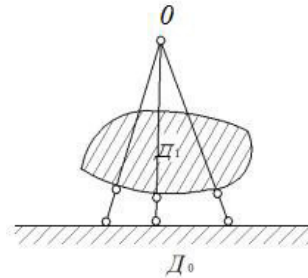


Рис. 1.17

Почему нельзя применять мгновенно изменяемые системы как расчетные схемы сооружений, покажем на примерах ниже.

Пример 1.1

Пусть мы имеем систему, состоящую из двух дисков D_1 и D_0 (рис 1.18), соединенных тремя стержнями. Стержень 3 проходит вблизи точки O на расстоянии a . На диск D_1 действует сила P , отстоящая от точки O на величину r .

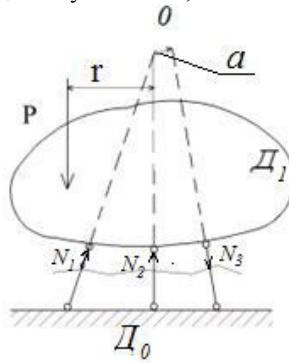


Рис. 1.18

Проведем сечение через стержни 1, 2 и 3 и составим уравнение равновесия $\sum M_0 = 0$.

$$P \cdot r - N_3 \cdot a = 0.$$

Решив это уравнение, найдем $N_3 = P \frac{r}{a}$. Если $a \rightarrow 0$, то $N_3 \rightarrow \infty$.

Мгновенно изменяемые системы характеризуются тем, что в отдельных стержнях усилия принимают очень большие значения.

Пример 1.2

Имеем систему, состоящую из диска AC и присоединенного к нему узла B (рис. 1.19, а).

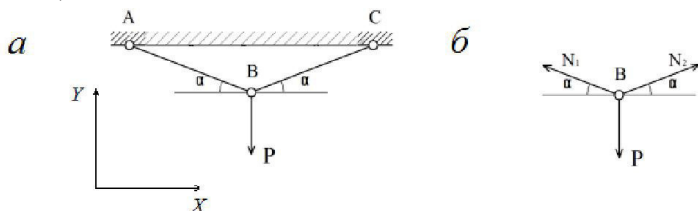


Рис. 1.19

Найдем усилия в стержнях AB и BC . Для этого вырежем узел B (рис. 1.19, б) и составим уравнение равновесия

$$\sum x = 0: N_1 = N_2.$$

$$\sum y = 0: P - (N_1 \cdot \sin \alpha) \cdot 2 = 0. \quad N_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ $\sin \alpha \rightarrow 0$ и $N_1 \rightarrow \infty$.

Когда угол α равен 0, имеем систему, состоящую из диска и узла B , присоединенного к нему двумя стержнями – AB и BC , которые лежат на одной прямой. Такую систему можно считать системой, состоящей из трех дисков (опорный диск AC , стержни AB и BC), соединенных тремя шарнирами, лежащими на одной прямой. Такие системы относятся к мгновенно изменяемым, и их нельзя применять в качестве расчетной схемы сооружения.

Если при расчете системы какое-либо усилие принимает бесконечно большое значение, то это является следствием мгновенной изменяемости системы.

2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

2.1. Основные понятия простых и многопролетных балок

Балками называют стержни, работающие на изгиб. Различают простые и составные балки или многопролетные. К простым балкам относятся однопролетные балки (рис. 2.1): шарнирно-опертая балка (рис. 2.1, а); консольная балка (рис. 2.1, б); шарнирно-опертая балка с одной консолью (рис. 2.1, в); шарнирно-опертая с двумя консолями (рис. 2.1, г).

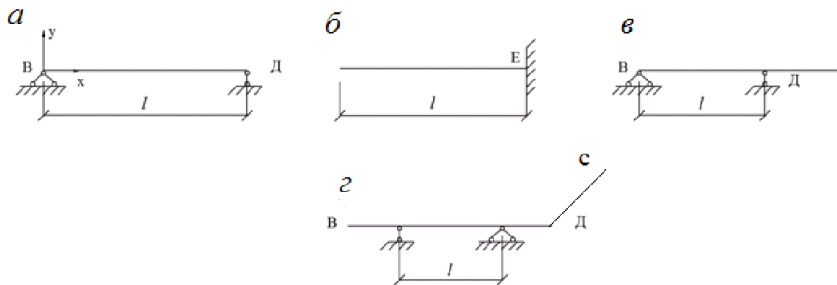


Рис. 2.1

В простых балках, нагруженных плоской уравновешенной системой сил, в общем случае возникают три неизвестных реакции: две в неподвижной опоре В и одна в подвижной опоре Д, а в заделке Е (рис. 2.1, б) возникают три реактивных усилия: момент, вертикальная и горизонтальная силы. Для любой плоской уравновешенной системы сил, как известно из курса теоретической механики, можно составить три независимых уравнения статики в любой из форм равновесия:

1. $\sum M_B = 0; \quad \sum M_D = 0; \quad \sum x = 0;$
2. $\sum y = 0; \quad \sum x = 0; \quad \sum M_B = 0;$
3. $\sum M_B = 0; \quad \sum M_D = 0; \quad \sum M_C = 0.$

Последняя форма равновесия (3) справедлива, когда точки В, Д, С лежат не на одной прямой (рис. 2.1, г).

Если число неизвестных реакций превышает число независимых уравнений статики, то такие системы считаются статически неопределимыми и требуют составления дополнительных уравнений.

Таким образом, под статически определимыми балками понимают такие, в которых при действии внешней нагрузки опорные реакции, внутренние усилия в любом сечении могут быть определены посредством уравнений статики.

2.2. Расчет многопролетной шарнирной балки

Многопролетной шарнирной балкой (рис. 2.2, а, в) называется статически определимая и геометрически неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок (с консолями или без них), соединенных между собой шарнирами.

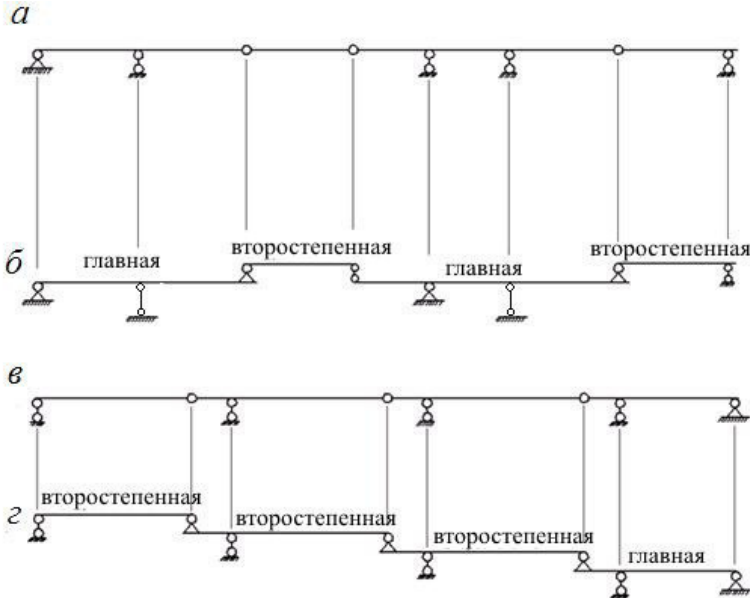


Рис. 2.2

Перед определением внутренних усилий необходимо убедиться, что заданная система статически определима и геометрически неизменяема, проведя статический и кинематический анализы.

Для построения эпюр M и Q обычно используется схема взаимодействия отдельных балок – «позтажная» схема, которая показана под схемой заданной балки (рис. 2.2, б, г). Для построения позтажной схемы необходимо сначала выделить главные балки. Для этого нужно мысленно удалить шарниры, соединяющие балки между собой. Главные балки – это балки, защемленные или имеющие две наземные опоры (рис. 2.3).



Рис. 2.3

Второстепенные балки имеют только одну наземную опору или не имеют их совсем (рис. 2.2, б, в).

Определение внутренних усилий в многопролетных балках ведут сверху вниз, начиная с самой верхней второстепенной балки. Реакции вышележащих балок передают на нижележащие с учетом 3-го закона Ньютона, т. е. меняя направление реакций на противоположное при передаче их вниз. Таким образом, расчет многопролетных шарнирных балок сводится к расчету однопролетных балок, с консолями или без них.

Пример 2.1

Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для многопролетной балки (рис. 2.4, а).

Решение

1. Проверка геометрической неизменяемости и статической определимости системы.

Степень свободы W определяется по формуле:

$$W = 3D - 2Ш - C_0.$$

Для заданной балки имеем: дисков $D = 4$, шарниров $Ш = 3$, опорных реакций $C_0 = 6$ (заделка в сечении A эквивалентна трем опорным стержням и внешние опоры B, C, D). Следовательно, $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$, и необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Но оно не является достаточным, и необходимо провести структурный анализ системы.

Для геометрического анализа расчетную схему балки можно представить в виде трех дисков (рис. 2.5): диска I, включающего балку А-1 и основание; дисков II и III. Эти диски соединены шарниром 3 и четырьмя стержнями (тремя опорными – B, C, D и стержнем 1–2). Точка пересечения направления стержней 1–2 и опорного стержня B является условным шарниром O_1 . Стержни опор C и D , как параллельные, имеют условный шарнир O_2 в бесконечности. Таким образом, имеем случай, когда три диска – I, II, III – соединяются тремя шарнирами ($O_1, 3, O_2$), не расположенными на одной прямой. Такая система геометрически неизменяема по признаку неизменяемости стержневых систем.

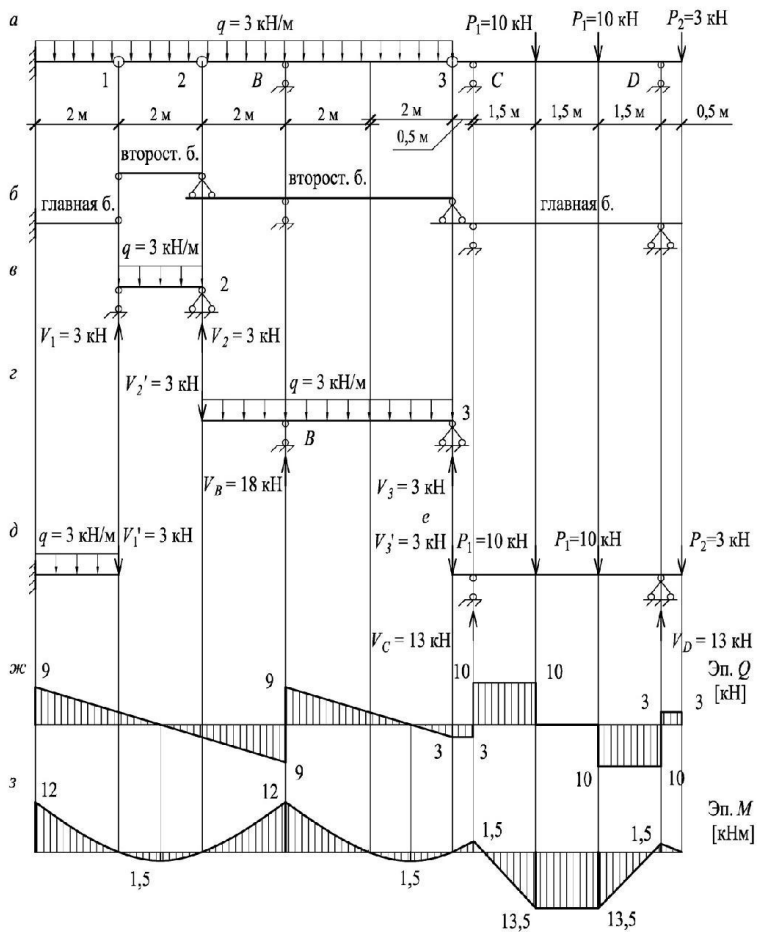


Рис. 2.4

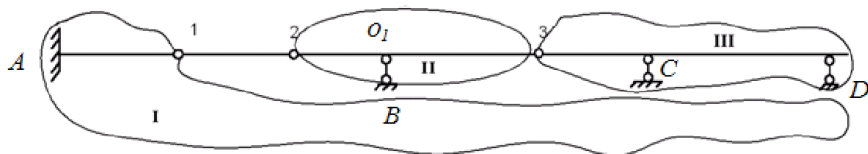


Рис. 2.5

Равенство $W = 0$ одновременно является признаком статической определимости заданной системы.

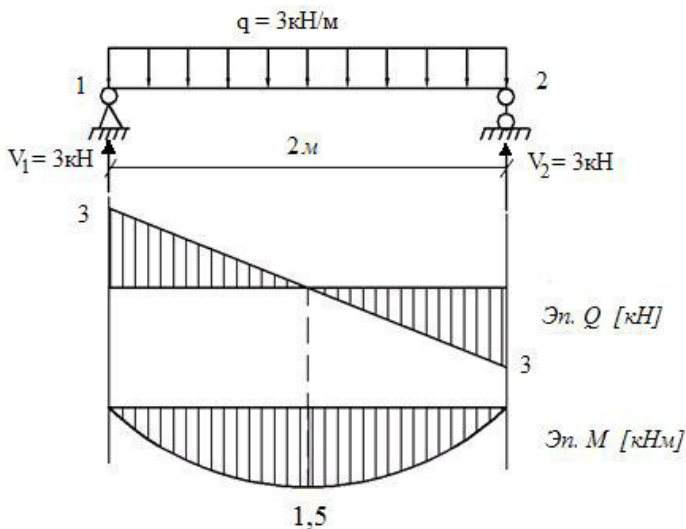


Рис. 2.6

2. Поэтажная схема взаимодействия отдельных балок показана на рис. 2.4, б.

3. Построение эпюр Q и M начинаем с самой верхней второстепенной балки 1-2, изображенной на рис. 2.6.

Расчет заданной балки не приводится, так как известен из курса «Сопротивление материалов». $M_{\max} = ql^2 / 8 = 3 \cdot 2^2 / 8 = 1,5$ (кНм).

Расчет второстепенной балки 2-B-3 (рис. 2.7)

Определение реакций опор:

$$\sum m_3 = 0.$$

$$3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 3 - V_B \cdot 4 = 0.$$

$$V_B = 18 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B = 0.$$

$$V_3 \cdot 4 - 3 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 0.$$

$$V_3 = 3 \text{ кН}.$$

Проверка реакций опор:

$$\sum y = 0.$$

$$-3 - 3 \cdot 6 + 18 + 3 = -21 + 21 = 0.$$

Определение x_0 :

$$-V_3 + qx_0 = 0.$$

$$x_0 = V_3 / q = 3 / 3 = 1 \text{ (м)}.$$

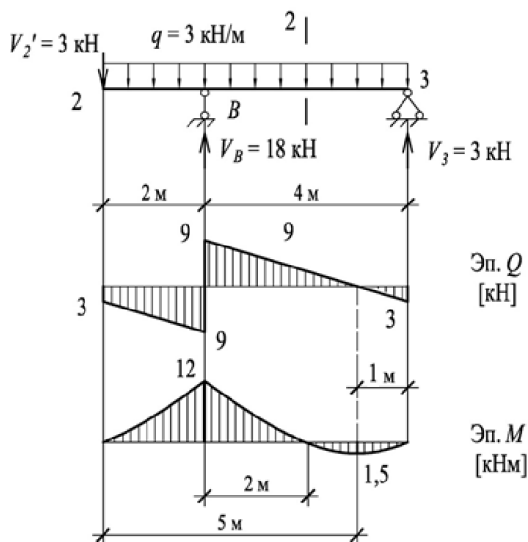


Рис. 2.7

Построение эпюр Q и M производится по известной методике из курса «Сопротивление материалов»: поперечная сила Q в данном сечении равна алгебраической сумме проекций внешних сил (на нормаль к оси балки), приложенных по одну сторону от данного сечения; изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов этих же сил относительно точки x . Следует напомнить, что критерий знака изгибающего момента M отличается от критерия знаков моментов относительно точки, который используется при определении реакций опор. Удобно связать знаки M с характером деформации балки: моменты, которые изгибают балки выпуклостью вниз, считаем положительными (рис. 2.8, a) и наоборот (рис. 2.8, b).

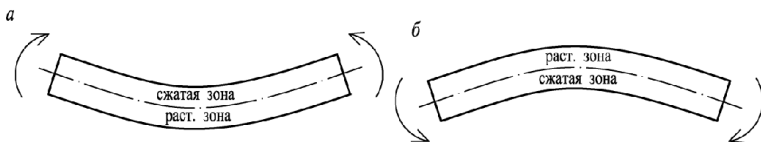


Рис. 2.8

Если положительное направление оси момента M направить вниз, то эпюра M автоматически получится построенной на «растянутом волокне», как принято в курсе строительной механики. В машиностроении можно строить эпюру M на «сжатом волокне», направив ось момента M вверх, как принято в математике. Оба варианта равноценны.

Для балки 2-В-3 изгибающие моменты:

в сечении В: $M_{x=2\text{м}} = -3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -12 \text{ кНм}$;

в сечении: $M_{x=5\text{м}} = -3 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot 2,5 + 18 \cdot 3 = 1,5 \text{ кНм}$.

Дополнительно вычислим изгибающий момент в сечении 2 при $x = 4 \text{ м}$, для которого в дальнейшем будет построена линия влияния при расчете балки на подвижную нагрузку:

$$M_{x=4\text{м}} = -3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 18 \cdot 2 = 0.$$

Эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента второстепенной балки 2-В-3 показаны на рис. 2.7.

Расчет главной балки А-1 (рис. 2.9)

При желании можно определить реакции опоры в заделке А:

$$\sum y = 0: V_A - 3 - 3 \cdot 2 = 0.$$

$$V_A = 9 \text{ кН}.$$

$$\sum m_A = 0: M_A - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

$$M_A = 12 \text{ кНм}.$$

Но для защемленной балки эпюры можно строить без определения реакций опоры, рассчитывая численные значения со стороны свободного конца.

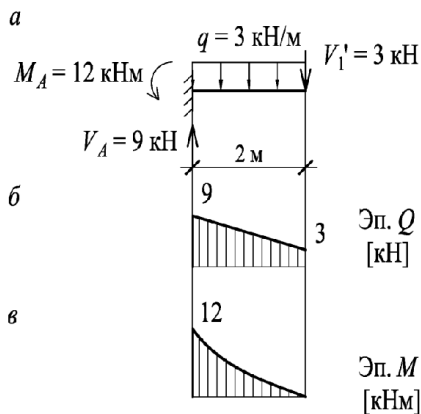


Рис. 2.9

Расчет главной балки 3-С-Д (рис. 2.10)

$$M_{x=0,5} = -3 \cdot 0,5 = -1,5 \text{ (кНм)}.$$

$$M_{x=2} = -3 \cdot 2 + 13 \cdot 1,5 = 13,5 \text{ (кНм)}.$$

В силу симметрии для построения эпюры изгибающих моментов достаточно определить значения моментов в сечении С при $x = 0,5 \text{ м}$ и в сечении при $x = 2 \text{ м}$ (рис. 2.10).

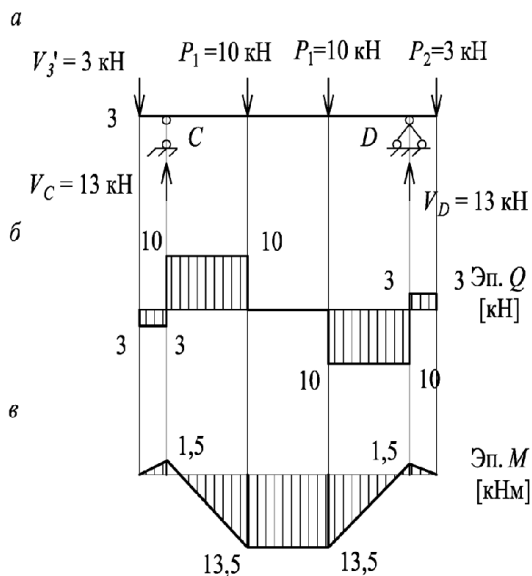


Рис. 2.10

Полные эпюры Q и M приведены на рис. 2.4, ж, з.

Далее приводится расчет этой же балки на подвижную нагрузку с построением линий влияния (ЛВ).

На рис. 2.4, а отмечены сечения 1 и 2. Для этих сечений ниже будут определены Q и M с помощью построенных линий влияния (ЛВ). Полученные результаты расчета по ЛВ необходимо сравнить с аналитическим расчетом.

3. РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

3.1. Понятие линий влияния

При действии на сооружение подвижной нагрузки усилия в нем меняются от нуля до максимума. Например, при движении автомобиля по мосту, при некотором его положении внутренние усилия достигнут максимального значения (рис. 3.1). Таким образом, возникает вопрос об определении опасного положения системы движущихся грузов. Для решения этой задачи предварительно рассматривается работа сооружения при перемещении по нему вертикальной силы $P = 1$ и строится так называемая линия влияния (рис. 3.2). *Линией влияния* (ЛВ) какого-нибудь усилия (опорной реакции, поперечной силы, изгибающего момента) в произвольном сечении элемента сооружения называется график, который показывает, как изменяется величина усилия в этом сечении при перемещении единичной безразмерной силы ($P = 1$) постоянного направления вдоль элемента.

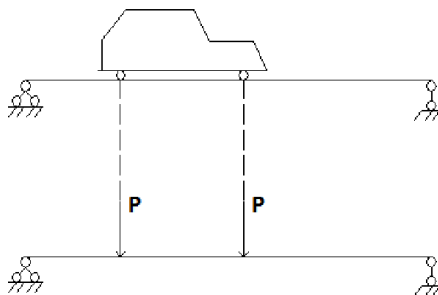


Рис. 3.1

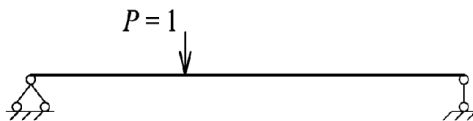


Рис. 3.2

При расчете на подвижную нагрузку с помощью ЛВ решаются два типа задач. Нахождение наиболее невыгодного (опасного) положения системы движущихся грузов, при котором возникают в конструкции максимальные усилия, – это *главная задача*.

Вторая задача: определить опорные реакции, поперечные силы, изгибающие моменты в балках или усилия в элементах ферм при заданном

расположении неподвижной нагрузки. Отметим, что линии влияния и эпюры внутренних усилий имеют существенное различие.

Эпюра внутреннего усилия, например изгибающего момента, показывает, как распределяется это усилие (изгибающий момент) по длине элемента, по всем его сечениям от неподвижной нагрузки, действующей на этот элемент; линия влияния показывает изменение усилия только в одном, наперед заданном сечении, при движении силы $P = 1$ в продольном направлении.

Ниже рассматриваются примеры построения линий влияния в балках для различных усилий.

3.2. Построение линий влияния для балки на двух опорах

3.2.1. Линии влияния (ЛВ) опорных реакций V_A и V_B

Для построения ЛВ рассмотрим движение груза $P = 1$ по балке (рис. 3.3).

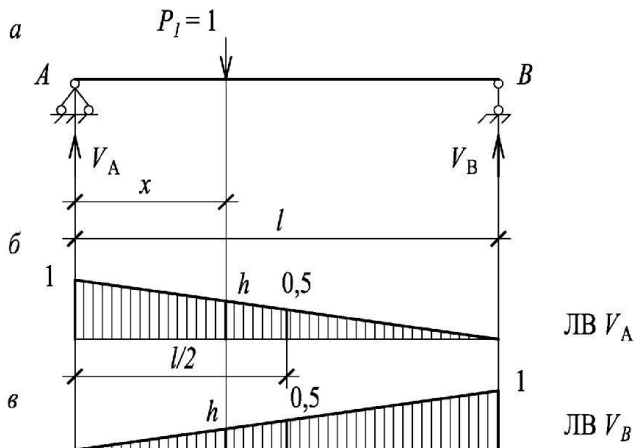


Рис. 3.3

Пусть груз $P = 1$ будет расположен на расстоянии x от левой опоры A .

Запишем уравнение равновесия для балки в форме моментов относительно точки B :

$$\sum M_B = 0; \quad -V_A \cdot l + P(l - x) = 0.$$

Отсюда: $V_A = \frac{1(l-x)}{l}$ – уравнение прямой.

При $x = 0$ $V_A = 1$.

При $x = l$ $V_A = 0$.

Для построения линии влияния реакции V_A откладываем от оси абсцисс (рис. 3.3, б) в определенном масштабе найденное значение реакции $V_A = 1$; $V_A = 0$ и соединяем полученные точки прямой. Эта прямая и является ЛВ опорной

реакции V_A . Ордината h на линии влияния (рис. 3.3, б) выражает, что при расположении нагрузки P на расстоянии x от опоры A значение реакции V_A (с учетом масштаба) будет равно

$$V_A = P \cdot h = P \cdot h; \text{ при } P = 1 \text{ реакция } V_A = 1 \cdot h = h.$$

Для построения ЛВ V_B используем уравнение $\sum M_A = 0$ и аналогично построим прямую по двум точкам. Указанные ЛВ приведены на рис. 3.3. Каждая ордината ЛВ равна величине данной реакции, когда груз $P = 1$ становится над этой ординатой. Например, при $x = l/2$ $V_A = 0,5$, если определять реакцию с помощью линии влияния. Это можно проверить, определив V_A аналитически, т. е. вторым способом: составим уравнение равновесия $\sum M_A = 0$, откуда $V_A = \frac{1 \cdot 0,5l}{l} = 0,5$.

3.2.2. Построение ЛВ изгибающего момента для конкретного, наперед заданного сечения

Строим линию влияния момента со стороны растянутого волокна, так же, как и эпюру изгибающих моментов.

Пусть требуется построить ЛВ изгибающего момента для сечения I (рис. 3.4). При построении ЛВ рассматриваем два случая.

Случай а: груз $P = 1$ движется левее сечения I . Тогда изгибающий момент проще найти, рассматривая равновесие правой части балки, на которую действует только реакция V_B .

$$\text{Из уравнения равновесия правой части имеем } M_1 = V_B \cdot l_2.$$

Таким образом, при движении груза $P = 1$ левее сечения 1-1 линия влияния изгибающего момента ЛВ $M_1 = \text{ЛВ } V_B \cdot l_2$, т. е. повторяет на левой ветви балки линию влияния реакции V_B , увеличенную в l_2 раза (рис. 3.4, а).

Случай б: груз $P = 1$ расположен правее сечения 1-1. В этом случае изгибающий момент проще выразить через опорную реакцию V_A , рассматривая левую часть балки $M_1 = V_A \cdot l_1$.

Таким образом, ЛВ изгибающего момента M_1 на правой ветви балки повторяет ЛВ реакции V_A , умноженную на l_1 .

Построение правой ветви линии влияния изгибающего момента M_1 показано на рис. 3.4, б и для всей балки – на рис. 3.4, в.

Нетрудно установить, что правая и левая ветви пересекаются в точке K , т. е. под сечением 1 (рис. 3.4, в). Ординаты линии влияния изгибающего момента выражаются в единицах длины, например в сантиметрах.

$$\text{Масштаб определяем по формуле: } M = \frac{l_1}{H_1} \text{ или } M = \frac{l_2}{H_2}, \text{ размерность } - \left[\frac{\text{м}}{\text{см}} \right].$$

Величина изгибающего момента в каком-либо сечении балки, например сечении I , при расположении груза $P=1$ в этом сечении равна ординате u , взятую

под грузом. При построении ЛВ изгибающих моментов для других сечений нет необходимости каждый раз рассматривать случаи *a* и *б*. Можно построить правую ветвь, отложив под опорой *A* размер $1 \cdot l_1$, далее спроектировать сечение *I* на правую ветвь и соединить эту точку с нулем под опорой *A*. Все ЛВ для сечений 1, 2, 3 идентичны и строятся по одному и тому же принципу. ЛВ для M_2 сечения 2, отстоящего на расстояние в 3 м от левой опоры, и ЛВ M_3 для сечения 3, отстоящего на расстоянии 0,5 м от опоры *A*, строятся аналогично (рис. 3.5). Все ординаты ЛВ M_1 показывают только M_1 , ЛВ M_2 – только M_2 , ЛВ M_3 – только M_3 .

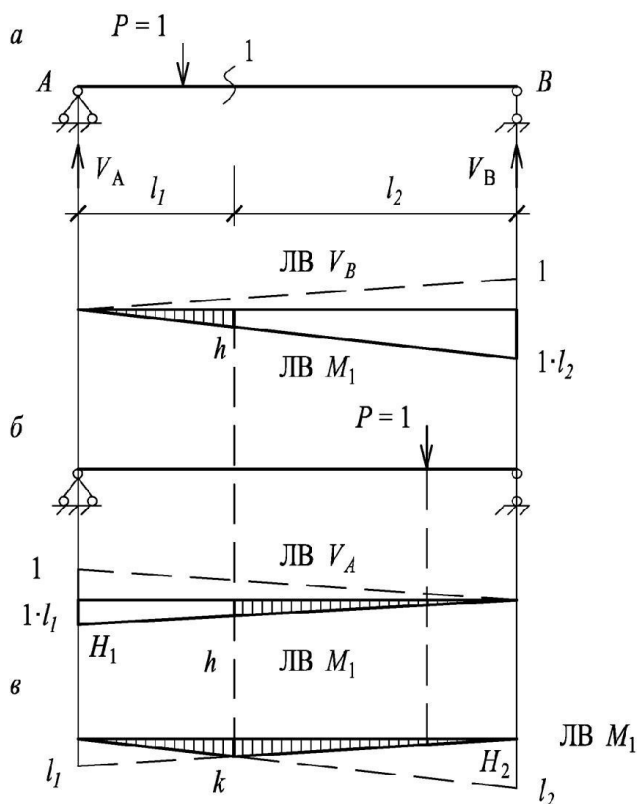


Рис. 3.4

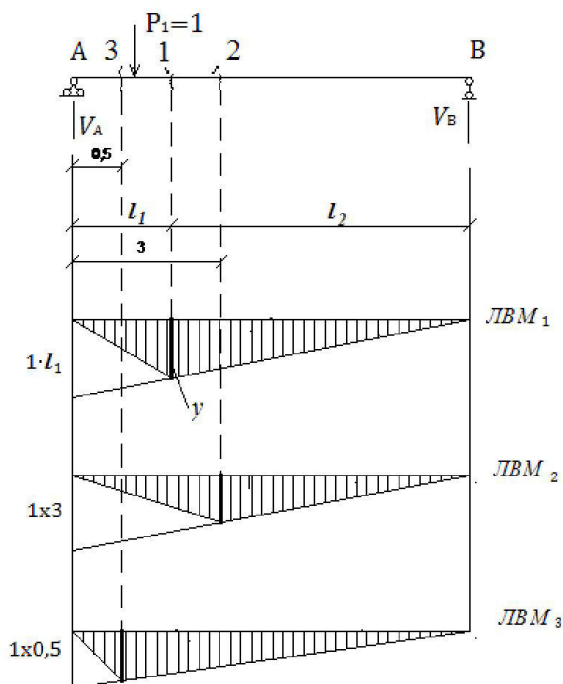


Рис. 3.5

3.2.3. Построение ЛВ поперечной силы Q для сечения I

Построение ЛВ силы Q представлено на рис. 3.6.

Рассматриваем два положения силы $P = 1$: левее и правее сечения I .

1. Рассмотрим случай, когда груз $P = 1$ находится левее сечения I , при этом для построения левой ветви ЛВ определяем Q_1 из равновесия правой части: $Q_1 = -V_B$, т. е. ЛВ Q_1 (левая ветвь) повторяет ЛВ реакции опоры V_B , но с обратным знаком.

Таким образом, при движении груза $P = 1$ левее сечения I ЛВ Q_1 будет представлять собой линию влияния опорной реакции V_B от сечения I до опоры A . Она получается из построения ЛВ реакции V_B с обратным знаком I .

ЛВ Q_1 показана на рис. 3.6, а (левая ветвь).

2. В случае, когда груз $P = 1$ (рис. 3.6, б) находится правее сечения I , для построения ЛВ правой ветви, Q_1 выражаем из равновесия левой части: $Q_1 = V_A$. Полная ЛВ Q_1 приведена на рис. 3.6, в, причем ветви пересекаются под сечением I .

Аналогично построена ЛВ Q_2 .

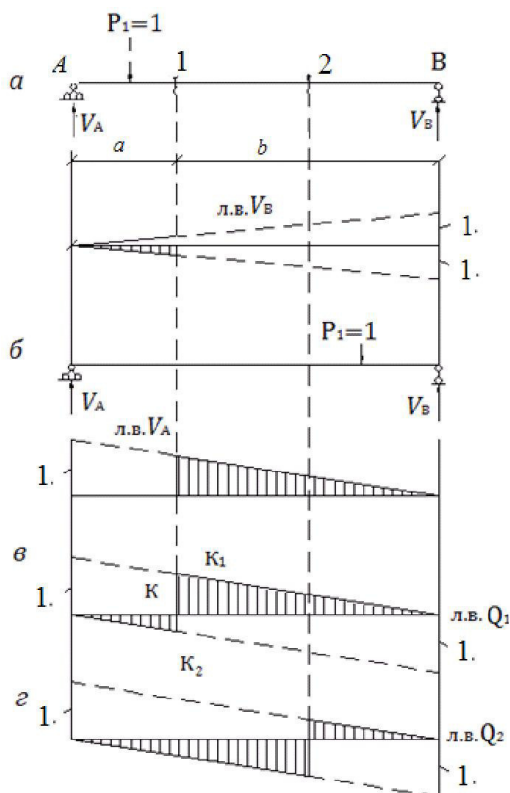


Рис. 3.6

Необходимо обратить внимание на знак ЛВ. Положительные значения ординат ЛВ Q откладываются вверх, а отрицательные – вниз. При этом в сечении 1 на линии влияния Q_1 (рис. 3.6, в) будет скачок. Сумма отрезков KK_1 , KK_2 должна всегда равняться величине груза $P_1=1$.

3.3. Построение линий влияния в консольной балке

В отличие от балки на двух опорах, при построении линий влияния в консольной балке рационально выражения для моментов и поперечных сил составлять со стороны силы $P = 1$. Покажем построение ЛВ изгибающего момента для сечения 1, отстоящего на расстоянии l_1 от левого конца. В произвольном сечении x $M_1 = -1 \cdot x$. Если $x = 0$, то $M_1 = 0$; при $x = l$ изгибающий момент $M_1 = -1 \cdot l_1$. ЛВ M_1 приведена на рис. 3.7, б; здесь же

показана ЛВ M_2 для сечения 2, отстоящего на расстоянии 0,7 м от левого конца балки (рис. 3.7, в). ЛВ M_2 построена по тому же принципу, что и ЛВ M_1 .

Построим ЛВ поперечной силы для сечений 1 и 2. $Q_1 = \text{const}$ и равна -1 до сечения 1. Понятно, что правее сечения 1 $Q_1 = 0$, так же как и $Q_2 = 0$ правее сечения 2, их линии влияния приведены на рис. 3.7 г, д. Здесь же показана ЛВ Q_3 для сечения консольной балки с заделкой слева, при движении груза $P = 1$ правее сечения 3.

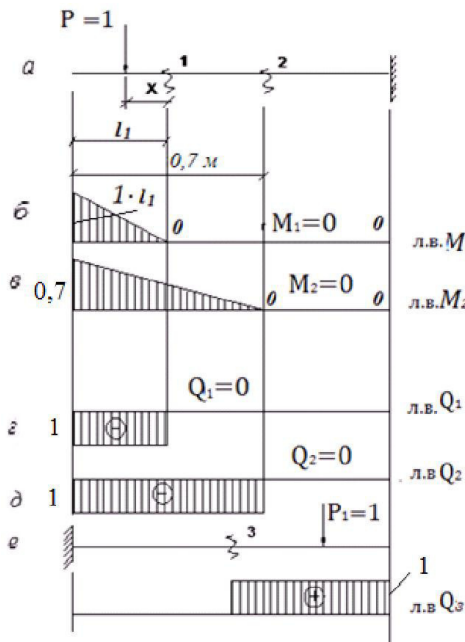


Рис. 3.7

3.4. Построение линий влияния для двухопорной балки с консолями

Так как линии влияния реакций опор, изгибающих моментов, поперечных сил меняются по закону прямой, то при построении линий влияния для консольной балки прямые продолжают за опоры, под консолями. Линии влияния для указанной балки приведены на рис. 3.8. На этом же рисунке приведены типовые (стандартные) линии влияния усилий для характерных сечений балки. Сечения 1 и 2 расположены в пролете (между опорами), сечение 3 – бесконечно близко к опоре А, но правее; сечение 4 – бесконечно близко к опоре В, но левее; сечения 5 и 6 – на консолях. На рис. 3.8 приведены ЛВ реакций опор и моментов для указанных сечений, а на рис. 3.9 – линии влияния поперечных сил для этих же сечений.

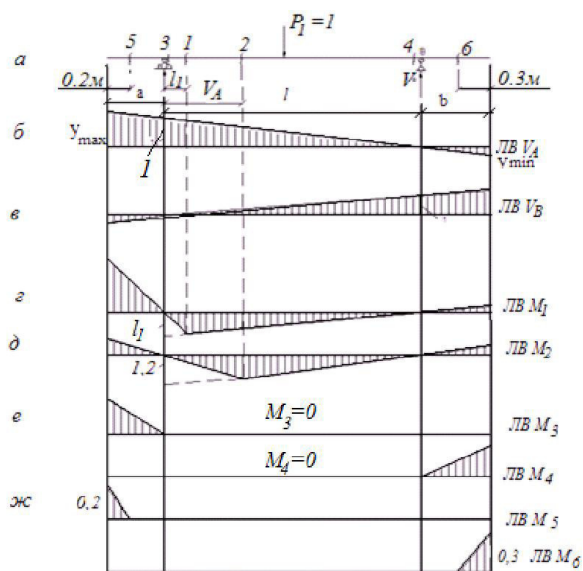


Рис. 3.8

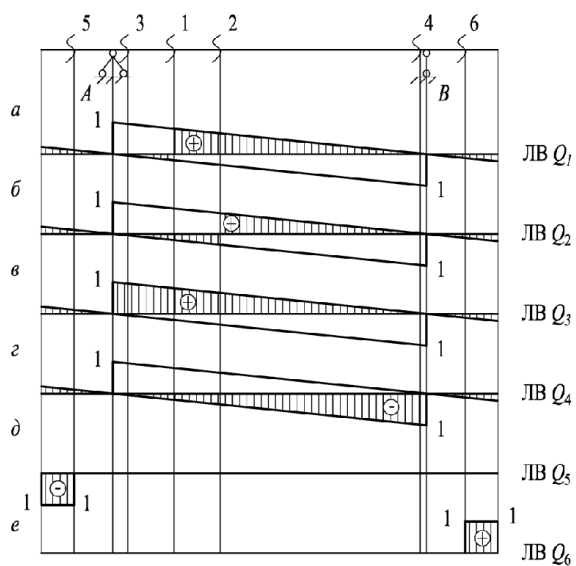


Рис. 3.9

Значение ординат на линиях влияний V_A , V_B и т. д. в каком-либо сечении балки можно определять из подобия, например, для определения ординаты y_{\max} на линии влияния реакции V_A (рис. 3.8, б) используем соотношение: $\frac{y_{\max}}{l+a} = \frac{1}{l}$, откуда $y_{\max} = \frac{1}{l}(l+a)$. Аналогично находим $y_{\min} = \frac{1}{l}b$.

3.5. Построение линий влияния для многопролетной шарнирной балки

Линии влияния строятся сначала для отдельной балки с помощью типовых линий влияния, приведенных на рис. 3.8 и 3.9. Далее учитывается перемещение силы $P = 1$ по вышележащим балкам, для этого проводится продолжение ЛВ с приведением их к нулю над внешними опорами вышележащих балок (рис. 3.10). На ЛВ моментов и поперечных сил ординаты над внешними опорами равны нулю, так как при остановке силы $P = 1$ над внешней опорой реакция этой опоры равна 1, а реакция второй опоры равна нулю, и далее вниз действие силы не передается. Следует заметить, что ЛВ всех усилий для данной балки охватывают одни и те же участки, т. е. рассматриваемую балку и вышележащие. ЛВ самой верхней балки охватывают только данную балку, т. к. пока сила $P = 1$ движется по нижележащим балкам, усилия на верхней балке равны нулю. На рис. 3.10 приведены ЛВ реакций опор V_C , V_D , M_1 для главной балки 3-С-Д.

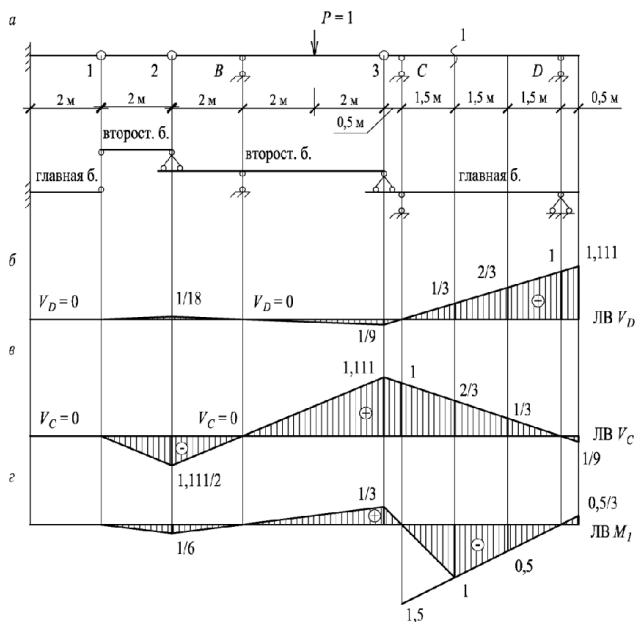


Рис. 3.10.

ЛВ для второстепенных балок 2-В-3 и 1-2 приведены на рис. 3.11.

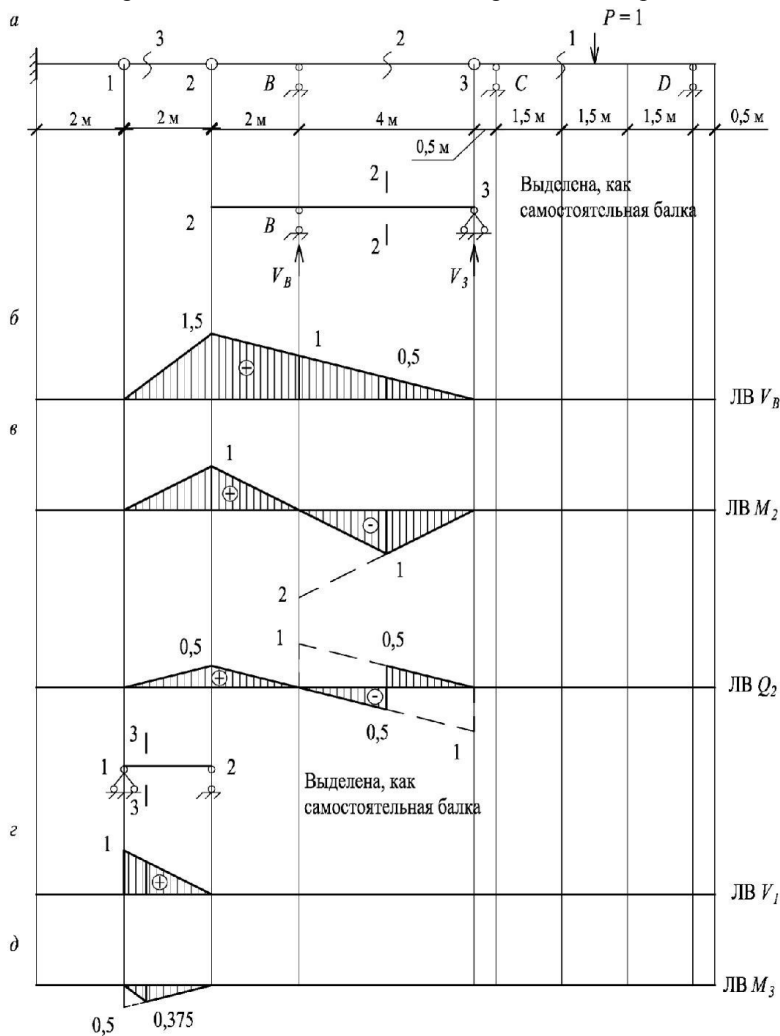


Рис. 3.11

3.6. Определение с помощью ЛВ усилий от заданной неподвижной нагрузки

Напоминаем, что при построении линий влияния на сооружение действует только одна единственная сила $P = 1$, которая движется по сооружению. Но по имеющейся ЛВ можно определить данное усилие от любой

неподвижной нагрузки. При этом, естественно, учитывается только та нагрузка, которая расположена над данной линией влияния. Для определения усилия по линии влияния (ЛВ) необходимо в случае, если на балку действует только сосредоточенный груз, взять ординату линии влияния, измеренную под грузом, и умножить ее на величину груза. Например, требуется по ЛВ V_B (рис. 3.11, б) найти реакцию V_B , когда груз $P = 100$ кН находится посередине пролета $B3$ (рис. 3.11, б). Для определения реакции V_B используем линию влияния этой реакции V_B (рис. 3.11, б). Устанавливаем ординату на ЛВ V_B по середине пролета $B3$, которая равна 0,5, и далее умножаем эту ординату на величину P . Реакция $V_B = 0,5 \cdot P = 0,5 \cdot 100 = 50$ (кН). Если на балку действует несколько сосредоточенных сил, то следует найти величины искомого усилия S от каждой сосредоточенной силы P_j путем умножения ординаты под соответствующей силой, взятую на линии влияния усилия S_j на величину силы P_j , а затем результаты вычислений просуммировать:

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots + P_n y_n = \sum_{j=1}^n P_j y_j,$$

где P_j – сосредоточенная внешняя сила; y_j – ордината линии влияния искомого усилия S , взятая под точкой приложения силы P_j .

На рис. 3.12 дается пояснение определения искомого усилия реакции V_A от нескольких сосредоточенных сил. Пусть линия влияния реакции V_A имеет вид, представленный на рис. 3.12, а силы, действующие на этом участке, P_1, P_2, P_3 известны. Тогда реакция V_A найдется как алгебраическая сумма всех сил, действующих на балку.

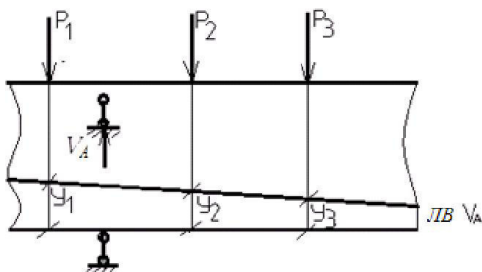


Рис. 3.12

$$V_A = \sum P_i \quad y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots$$

В случае действия на участке балки произвольно распределенной нагрузки находится q_x (рис. 3.13), искомое усилие S от этой нагрузки находится как произведение равнодействующей нагрузки R_c на ординату y_c под этой равнодействующей, взятую на линии влияния искомого усилия S .

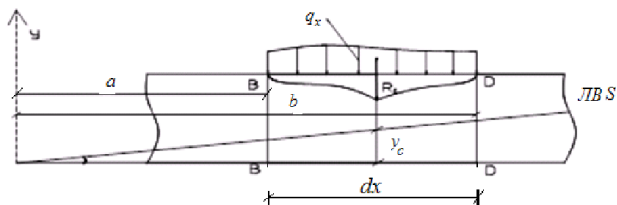


Рис. 3.13

$$S = \int_a^b q_x dx \cdot y_c = R_c \cdot y_c,$$

$$R_c = \int_a^b q_x dx,$$

где R_c – равнодействующая сила от распределенной нагрузки q_x .

Если равномерно распределенная нагрузка $q_x = q = \text{const}$, тогда искомое усилие S равно произведению площади загруженного участка линии влияния S на интенсивность распределенной нагрузки q (рис. 2.13).

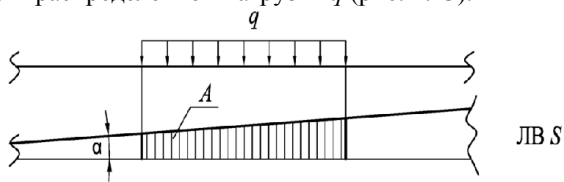


Рис. 3.14

В данном случае усилие $S = q \cdot A$, где A – площадь участка на линии влияния S под нагрузкой.

При действии на балку сосредоточенного внешнего момента, приложенного в сечении K (рис. 3.15), искомое усилие S находится как произведение тангенса угла наклона линии влияния усилия S на величину момента в данной точке K , т. е. $S = M_k \cdot \text{tg} \alpha_k$.

Угол α_k находится из геометрии. В рассматриваемом случае он совпадает с углом α . (рис. 3.15).

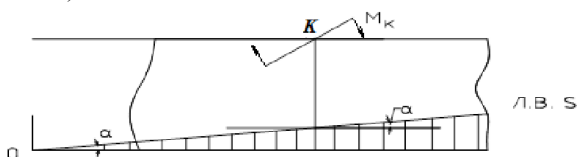


Рис 3.15

При действии на балку всех видов нагрузок P_j , q_j , M_{kj} искомое усилие S находится по формуле

$$S = \sum_{j=1}^n P_j y_j + \sum_{j=1}^n A_j q_j + \sum_{j=1}^n t g \alpha_{kj} M_{kj}$$

Здесь n – количество сосредоточенных сил P_j и сосредоточенных внешних моментов, выражение нужно понимать алгебраически.

Пример определения усилий в рассмотренной выше балке посредством линий влияния. Балка представлена на рис. 3.16, она состоит из двух главных балок: консольной А-1 и шарнирно опертой 3-С-Д, и двух второстепенных. Эта балка рассчитана в предыдущей главе. Там показан порядок расчета балки на неподвижную нагрузку и приведены эпюры изгибающих моментов M и поперечной силы Q для балки в целом. Рассмотрим некоторые случаи определения усилий в этой балке, используя линии влияния, построенные выше (рис. 3.10, 3.11).

Вычисление реакции V_D для нагрузок, действующих на балку (рис. 3.10)

Обращаемся к линии влияния этой реакции (ЛВ V_D), показанной на рис. 3.10, б.

Нагрузка $P_1 = 10$ кН, расположена над ординатой $y_1 = 1/3$; $P_1 = 10$ кН – над ординатой $y_2 = 2/3$; $P_2 = 3$ кН – над ординатой l, III и $q = 3$, действующую на участках ЛВ реакции V_D с площадями разных знаков. (рис. 3.10, б).

$$V_D = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 10 + 3 \cdot 1,111 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 4 \cdot 3 = 13 \text{ (кН)}.$$

Необходимые ординаты ЛВ под силами определены из подобия треугольников. Найденное значение $V_D = 13$ кН по линии влияния полностью совпадает со значением V_D , определенным аналитически (пример 2.1).

Вычисление опорной реакции V_B

Линия влияния V_B представлена на рис. 3.11, б. Над линией влияния V_B действует только равномерно распределенная нагрузка q на участке длиной 8 м.

С учетом этого имеем

$$V_B = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 8 \cdot 3 = 18 \text{ кН}.$$

Полученное значение также совпадает с аналитическим, определенным в главе выше (рис. 2.4).

Вычисление изгибающего момента в сечении 1-1(пролет ДС)

Для определения изгибающего момента M_1 используем линию влияния этого момента – ЛВ M_1 (рис. 3.10, в).

$$M_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \cdot 3 + 1 \cdot 10 + 0,5 \cdot 10 - \frac{0,5}{3} \cdot 3 = 13,5 \text{ кНм}.$$

Значение момента в сечении 1-1, определенное по линии влияния M_1 , совпадает со значением момента, определенным ранее (рис. 3.16).

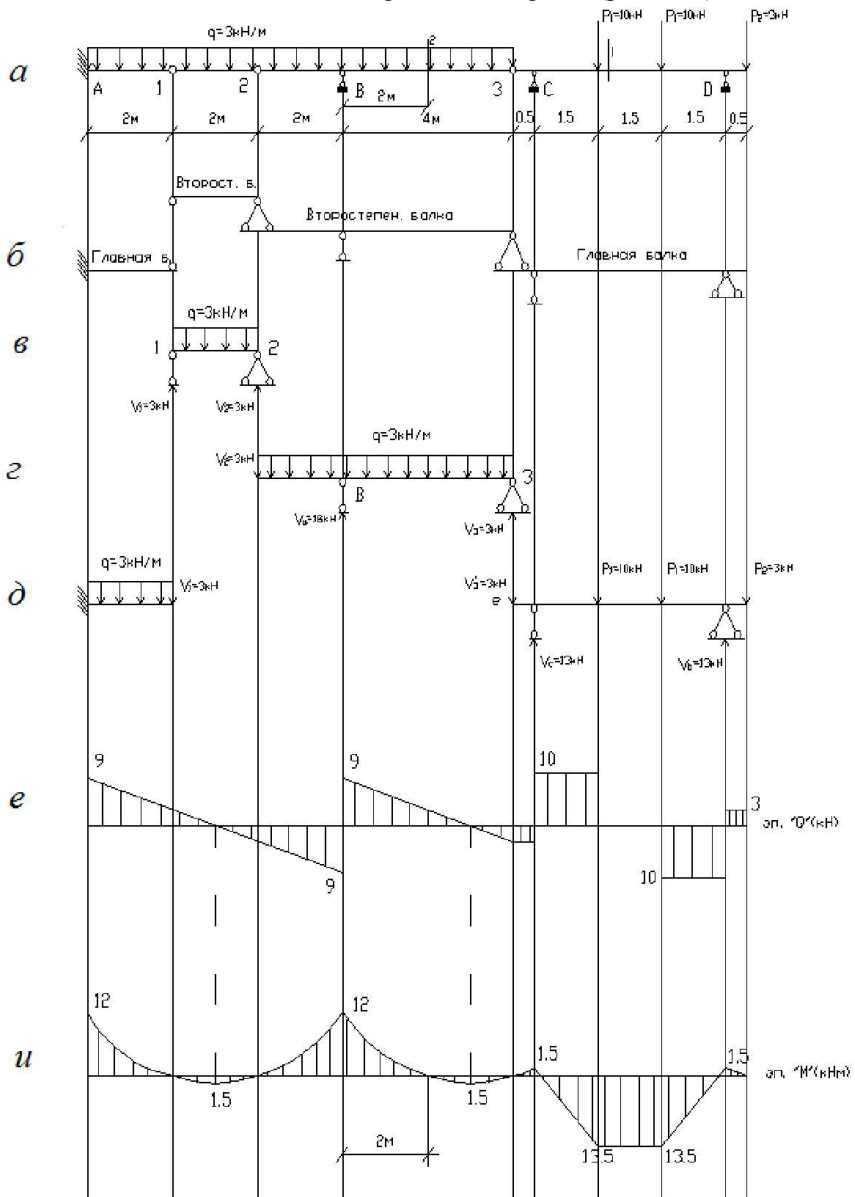


Рис. 3.16

4. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

4.1. Понятие ферм

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены жестких узлов шарнирными, или стержневая система, отдельные элементы которой связаны между собой шарнирами (рис. 4.1, а).

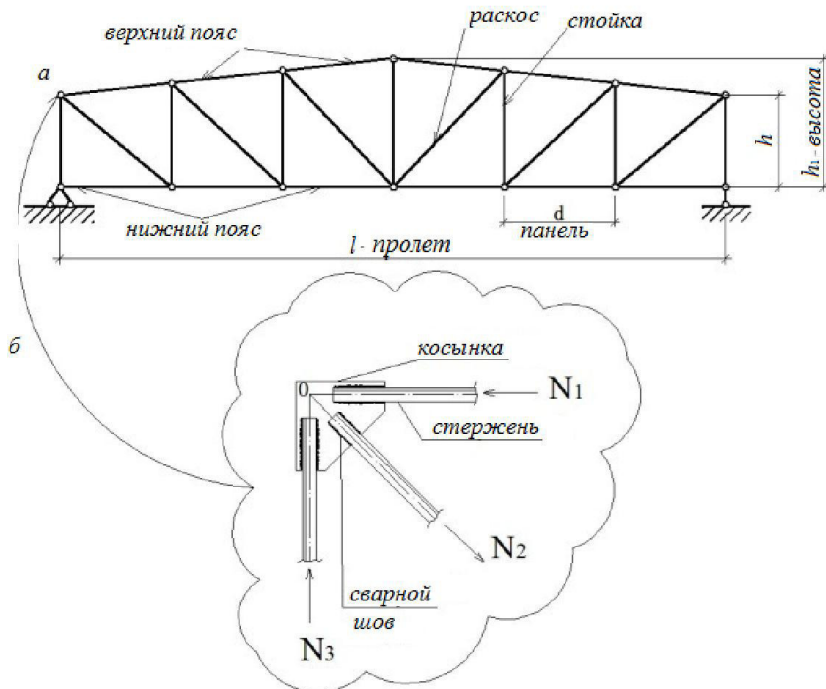


Рис. 4.1

В реальности узлы ферм являются жесткими (рис. 4.1, б). Стержни соединяются с помощью сварки или заклепками.

Совокупность стержней, ограничивающих ферму сверху, называется верхним поясом, снизу – нижним поясом. Стержни, соединяющие узлы верхнего и нижнего пояса, образуют решетку, поэтому фермы иногда называют решетчатыми системами. Вертикальные стержни называют стойками, наклонные – раскосами (рис. 4.1, а).

Фермы классифицируют по следующим признакам.

1. По материалу стержней:
 - деревянные,
 - металлические,
 - железобетонные,
 - комбинированные.
2. По направлению опорных реакций:
 - балочные (рис. 4.2, *а*),
 - распорные (рис. 4.2, *б*),
 - консольные (рис. 4.2, *в*),
 - балочно-консольные (рис. 4.5, *б*, *в*).

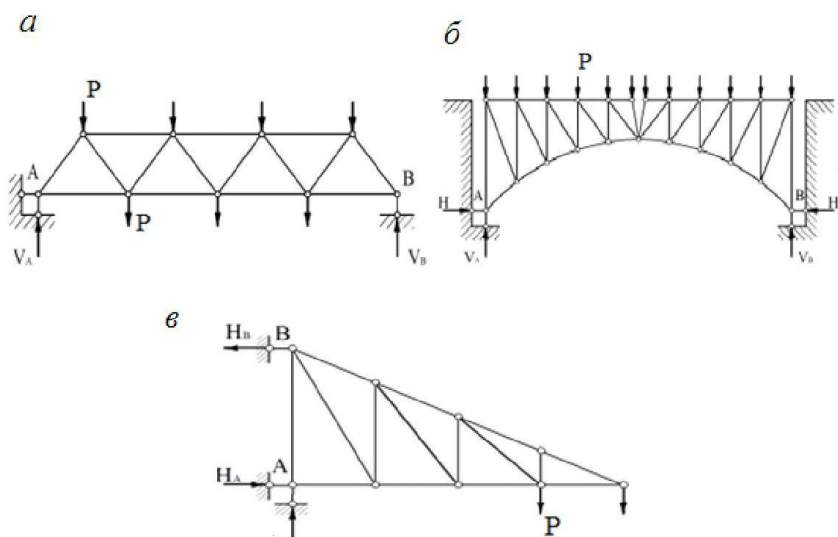


Рис. 4.2

3. По назначению:
 - стропильные (рис. 4.3, *а*, *б*),
 - мостовые (рис. 4.4, *а*, *б*, *в*),
 - крановые (рис. 4.5, *а*, *б*, *в*),
 - мачтовые (рис. 4.6, *а*, *б*).

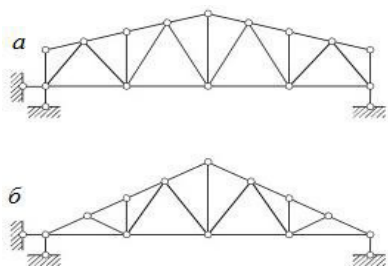


Рис. 4.3

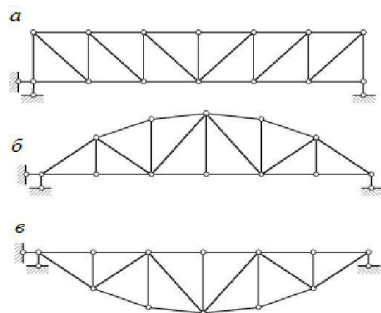


Рис. 4.4

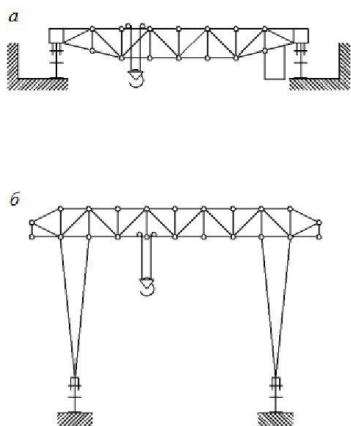


Рис. 4.5

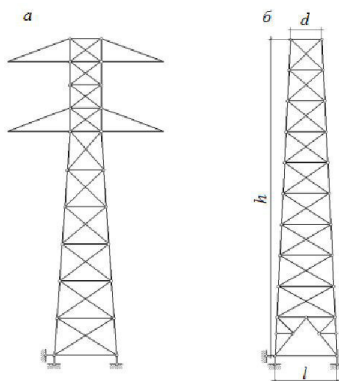
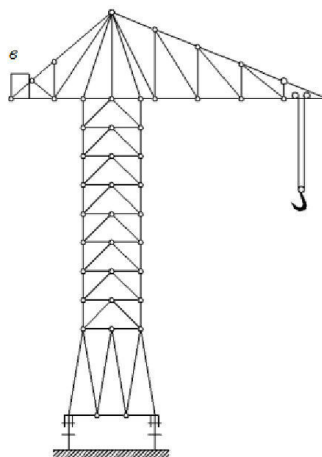


Рис. 4.6

4. По очертанию поясов:
 - с параллельными поясами (рис. 4.4, а, 4.7, а, б),
 - с криволинейными поясами (рис. 4.4, б, в),
 - полигонального очертания (рис. 4.3, а),
 - треугольные (рис. 4.3, б).
5. По типу решетки:
 - с раскосной решеткой (рис. 4.2, б, в; 4.4, а),
 - с треугольной решеткой (рис. 4.2, а),
 - с полураскосной решеткой (рис. 4.7, а),
 - с составной решеткой (шпренгельные фермы) (рис. 4.7, б).
6. По статическому признаку:
 - статически определимые,
 - статически неопределимые.

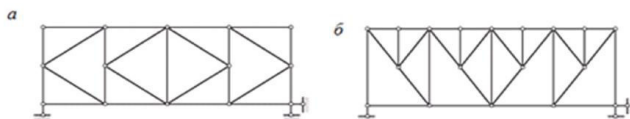


Рис. 4.7

4.2. Кинематический и статический анализы ферм

Необходимое условие геометрической неизменяемости и достаточное условие статической определимости ферм:

$$C=2Y, \quad (4.1)$$

где C – число стержней фермы, включая и опорные, Y – число узлов фермы.

Условия (1.1) еще не достаточно для определения геометрической неизменяемости. Надо сделать структурный анализ фермы. Признаки геометрической неизменяемости:

1) ферма, состоящая только из треугольников, явно геометрически неизменяема;

2) ферма неизменяема, если каждый последующий узел прикрепляется к двум предыдущим узлам двумя стержнями, не лежащими на одной прямой;

3) если в статически определимой ферме ($C=2Y$) при отсутствии внешней нагрузки можно доказать, что усилия во всех стержнях равны нулю, то ферма является геометрически неизменяемой, иначе ферма геометрически изменяема.

4.3. Примеры кинематического анализа ферм

Пример 4.1

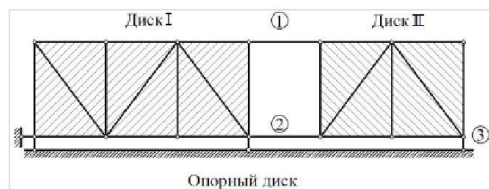


Рис. 4.8

Число узлов $Y = 14$, число стержней фермы $C_{\phi} = 6 + 6 + 12 = 24$.

Количество опорных стержней $C_o = 4$.

$24 + 4 = 2 \cdot 14$; $28 = 28$.

Необходимое условие неизменяемости выполняется.

Анализ структуры: диски I и II состоят из треугольников. Диск I прикреплен к опорному диску при помощи трех стержней, не параллельных и не пересекающихся в одной точке. Диск II соединен с неподвижным диском (диск I и опорный диск) при помощи трех стержней – 1, 2 и 3.

Вывод: ферма геометрически неизменяема.

Пример 4.2

Проверить геометрическую неизменяемость и провести структурный анализ фермы.

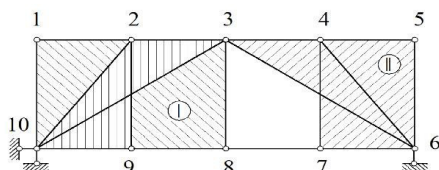


Рис. 4.9

$$C_{\phi} = 4 + 4 + 9 = 17,$$

$$C_o = 3,$$

$$Y = 10,$$

$$C = 2Y,$$

$$17 + 3 = 2 \cdot 10,$$

$$20 = 20.$$

Условие неизменяемости выполняется. Проводим структурный анализ.

К треугольнику 1-2-10 присоединены узлы 9 и 3 при помощи двух стержней, не лежащих на одной прямой. Они вместе образуют геометрически неизменяемую часть фермы. Узел 8 присоединен к геометрически неизменяемой части фермы, образуя диск I. Аналогично образован диск II. Эти два диска соединены между собой при помощи шарнира 3 и стержня 7-8, образуя геометрически неизменяемую систему. Ферма присоединена к опорному диску при помощи трех опорных стержней.

Вывод: данная ферма геометрически неизменяема.

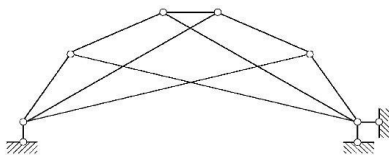


Рис. 4.10

Самостоятельно провести кинематический анализ фермы, приведенной на рис. 4.10.

4.4. Определение усилий в стержнях ферм

При расчете ферм приняты следующие допущения:

- во всех узлах идеальные шарниры;
- стержни прямолинейны;
- нагрузка приложена только в узлах.

При выполнении этих условий в стержнях фермы появляются только продольные силы N .

Методы определения усилий:

1. Метод сечений, который подразделяется на:

- способ вырезания узлов;
- способ сквозных сечений;
- способ замкнутых сечений.

2. Метод замены стержней.

Способ вырезания узлов рассмотрим на примере фермы на рис. 4.11.

В заданной ферме требуется найти усилия в стержнях, если нагрузки известны.

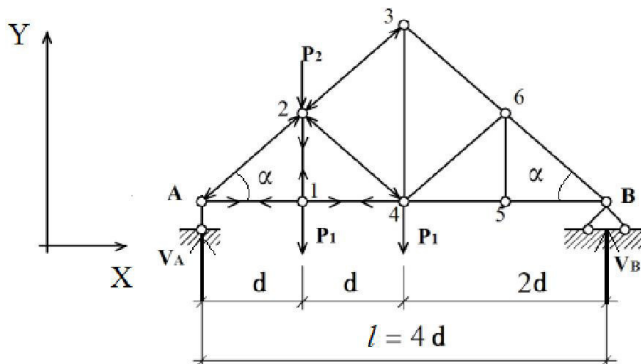


Рис. 4.11

1. Кинематический анализ:

$U = 8$, $C = 13 + 3 = 16$, $16 = 2 \cdot 8$ – необходимые условия геометрической неизменяемости выполняются. Ферма состоит из одних треугольников, поэтому геометрически неизменяема.

2. Опорные реакции определяются, как в однопролетной балке.

$$\sum M_A = (P_1 + P_2) \cdot d + P_1 \cdot 2d - V_B \cdot 4d = 0 \rightarrow V_B,$$

$$\sum M_B = V_A \cdot 4d - (P_1 + P_2) \cdot 3 \cdot d - P_1 \cdot 2d = 0 \rightarrow V_A.$$

3. Проверка:

$$\sum Y = V_A - 2P_1 - P_2 + V_B = 0.$$

Для этого проектируем все силы, включая реакции на ось Y .

4. Определяем усилия в стержнях.

Расчет начинаем с такого узла, где сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями. Такими узлами будут опорные узлы A и B .

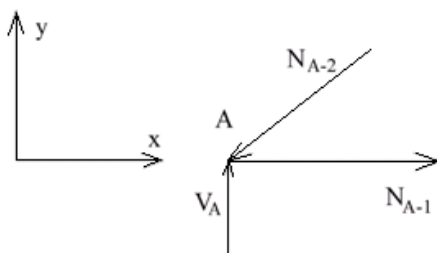


Рис. 4.12

Вырезаем узел A (рис. 4.12). Составляем уравнения равновесия:

$$1. \sum y = 0 - N_{A-2} \cdot \sin \alpha + V_A = 0, \text{ откуда } N_{A-2} = \frac{V_A}{\sin \alpha}.$$

$$2. \sum x = 0 \quad N_{A-1} - N_{A-2} \cdot \cos \alpha = 0, \text{ откуда } N_{A-1} = N_{A-2} \cdot \cos \alpha.$$

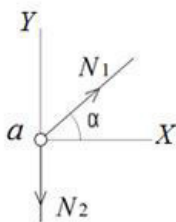
Затем вырезаем узел 1, после него узел 2 и т. д.

4.4.1. Частные случаи, встречающиеся при вырезании узлов

а) Незагруженный двухстержневой узел – оба стержня нулевые (рис. 4.13, а).

Составляем уравнение равновесия в форме суммы проекций всех сил в узле на оси Y и X .

а



б

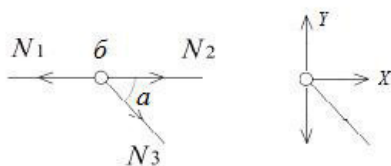


Рис. 4.13

$$\sum X = 0, N_1 \cos \alpha = 0, \text{ т. к. } \cos \alpha \neq 0, \text{ то } N_1 = 0.$$

$$\sum Y = 0, N_1 \sin \alpha - N_2 = 0, \text{ откуда следует } N_2 = 0.$$

б) Трехстержневой незагруженный узел, два стержня которого лежат на одной прямой (рис. 4.13, б). Отдельно стоящий стержень – нулевой.

$$\sum Y = 0 \quad N_3 \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow N_3 = 0,$$

$$\sum X = 0 \quad -N_1 + N_2 + N_3 \cos \alpha = 0 \rightarrow N_2 = N_1.$$

в) Трехстержневой узел загружен силой P (рис. 4.14).

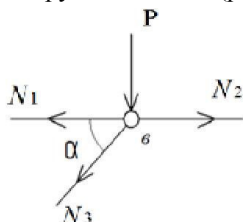


Рис. 4.14

$$\sum Y = 0: P + N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

отсюда $N_3 = -\frac{P}{\sin \alpha}$ (стержень сжат), т. к. действительное усилие N_3 направлено к узлу, а не от узла.

г) Четырехстержневой узел (рис. 4.15). Стержни попарно лежат на двух прямых.

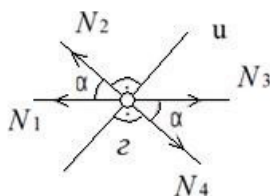


Рис. 4.15

$$\sum Y = 0: N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_4 = N_2.$$

$$\sum (u) = 0 \rightarrow N_3 = N_1.$$

Ось u перпендикулярна направлению линии усилий $N_2 - N_4$.

Опорный узел фермы (рис. 4.16).

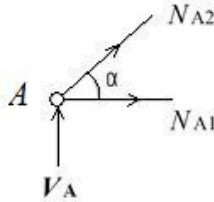


Рис. 4.16

$$1) \sum Y = 0; V_A + N_{A2} \cdot \sin \alpha = 0, N_{A2} = -\frac{V_A}{\sin \alpha}.$$

Знак «минус» говорит о том, что усилие N_{A2} направлено не от узла, а наоборот – к узлу, т. е. стержень A-2 сжат.

2) $\sum X = 0; N_{A1} + N_{A2} \cdot \cos \alpha = 0, N_{A1} = -N_{A2} \cdot \cos \alpha = \frac{V_A}{\operatorname{tg} \alpha}$ – стержень растянут.

Направление полученных усилий отмечаем на схеме фермы: если стержень растянут, то усилия направлены от узла, сжат – к узлу.

Рассмотрим узел 1:

$$\sum Y = 0: N_{12} = P_1; \quad \sum X = 0: N_{14} = N_{1A}.$$

Оба стержня растянуты.

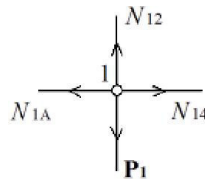


Рис. 4.17

Рассмотрим узел 2.

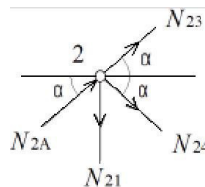


Рис. 4.18

Составим уравнения $\sum Y = 0$ и $\sum X = 0$ и, решив их совместно, найдем усилия N_{23} и N_{24} (оба усилия сжимающие, а не растянутые, как показано на рисунке).

Затем переходим к рассмотрению равновесия узла 3 и т. д.

Но можно на правой стороне фермы найти усилия также способом вырезания узлов, начиная с опорного узла *B*, затем 5, 6, 3. Способ вырезания достаточно прост, но ошибка, допущенная при определении какого-либо усилия, приведет к неверным результатам при определении усилий в последующих стержнях.

Примечание: в рассмотренных выше и ниже примерах используется система координат, показанная на рис. 4.11.

4.4.2. Способ сквозных сечений

Рассмотрим его на примере расчета фермы (рис. 4.19).

Пусть требуется определить усилия в стержнях 2-4, 3-4, 3-5. Сначала определяются опорные реакции V_1 и V_7 , как в однопролетной балке:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_7,$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_1.$$

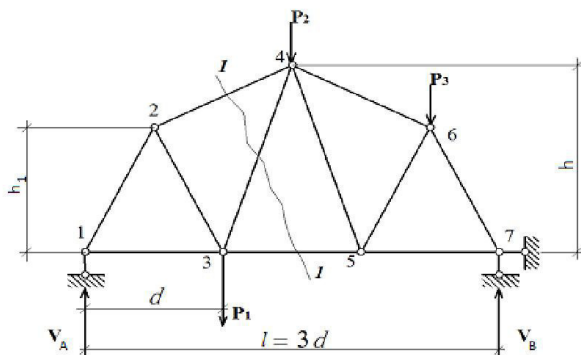


Рис. 4.19

Затем проводим сквозное сечение 1-1, разделяя ферму на две части. Отбрасываем одну часть (ту, на которой больше сил). В данном случае отбрасываем правую и рассматриваем оставшуюся левую часть (рис. 4.19), которая представляет собой плоскую систему произвольно расположенных сил. Для такой системы сил имеются три условия равновесия, поэтому ферму надо расечь так, чтобы в сечение попало не более трех стержней с неизвестными силами. Уравнения равновесия лучше всего записывать в виде суммы моментов относительно какой-либо точки. Такие точки будем называть моментными. В рассматриваемом случае, для определения усилия N_{24} , моментной точкой будет точка пересечения двух других усилий N_{34} и N_{35} – узел 3 (рис. 4.19, 4.20).

имеет вид :

$$\sum M_3 = 0: V_1 \cdot d + N_{24} \cdot r_1 = 0,$$

отсюда

$$N_{24} = -V_1 \frac{d}{r_1}.$$

т. е. ЭТОТ СТЕРЖЕНЬ СЖАТ.

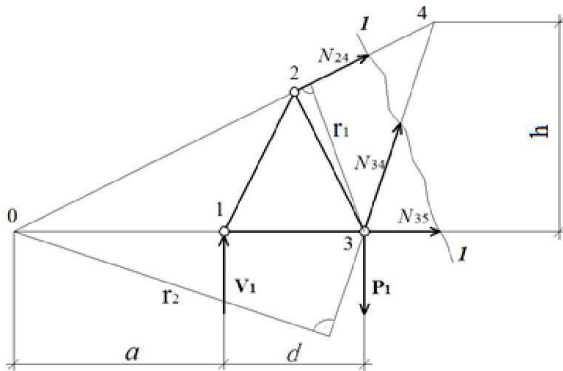


Рис. 4.20

пересечений усилий N_{24} и N_{35} (рис. 4.20).

$$\sum M_0 = 0: V_1 \cdot a - P_1 \cdot (a + d) + N_{34} \cdot r_2 = 0,$$

$$N_{34} = \frac{P_1(a+d) - V_1 \cdot a}{r_2}.$$

Составим уравнение относительно точки 4, которая является моментной:

$$\sum M_4 = 0 : V_1 \cdot 1,5d - P_1 \cdot \frac{d}{2} - N_{35} \cdot h = 0,$$

откуда

$$N_{35} = \frac{V_1 \cdot 1,5d - P_1 \cdot \frac{d}{2}}{h}.$$

Достоинство способа сквозных сечений:

- а) каждое усилие определяется из уравнения с одним неизвестным;
б) определяемое усилие не зависит от усилий в других стержнях.

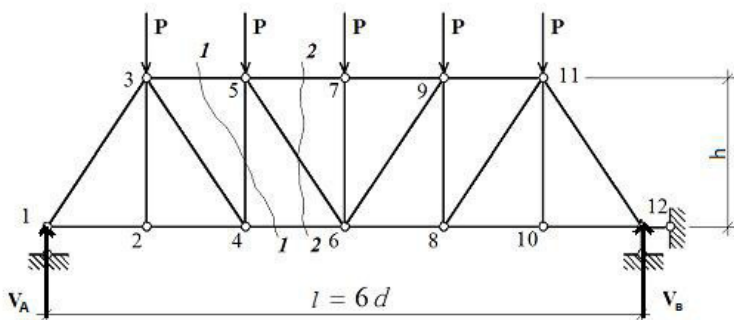


Рис. 4.21

При расчете ферм с параллельными поясами (рис. 4.21) усилия в стойках и раскосах лучше определять из уравнений суммы проекций на ось, перпендикулярную поясам (в данном примере – на ось Y).

Для определения N_{45} проведем сквозные сечения 1-1 и рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 4.22).

$$\sum Y = V_A - P + N_{45} = 0,$$

откуда $N_{45} = P - V_A$.

Так как $V_A > P$, усилие N_{45} будет отрицательным, т. е. стойка сжата.

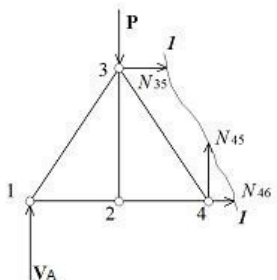


Рис. 4.22

Проведя сечение 2-2, из равновесия левой части фермы (рис. 4.23) найдем усилие в раскосе N_{56} .

$$\sum y = V_A - 2P - N_{56} \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$N_{56} = \frac{V_A - 2P}{\cos \alpha}.$$

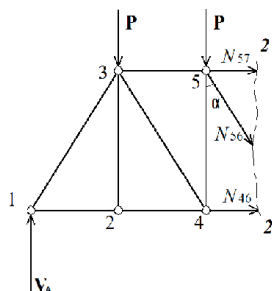


Рис. 4.23

На практике, как правило, используют комбинацию способов вырезания узлов и сквозных сечений.

Так, например, надо определить усилие в средней стойке для двускатной фермы (рис. 4.24).

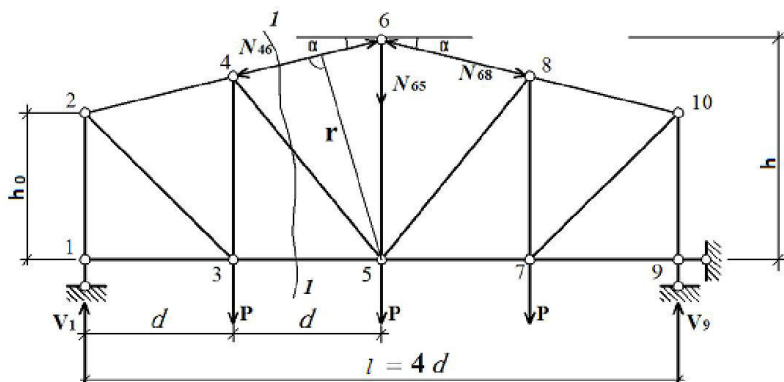


Рис. 4.24

Предварительно надо найти усилие N_{46} . Проведем сечение 1-1 и из уравнения

$$\sum M_5^{\text{лев}} = V_1 \cdot 2d - P \cdot d - N_{46} r = 0$$

определим

$$N_{46} = \frac{V_1 \cdot 2d - P \cdot d}{r}.$$

Затем вырежем узел 6 (рис. 4.25) и составим уравнения равновесия для этого узла.

В форме проекции всех сил на оси X и Y

$$\sum X = N_{46} \cdot \cos \alpha - N_{68} \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y = 2N_{46} \cdot \sin \alpha - N_{65} = 0,$$

откуда $N_{68} = N_{46}$.

$$N_{65} = 2N_{46} \cdot \sin \alpha.$$

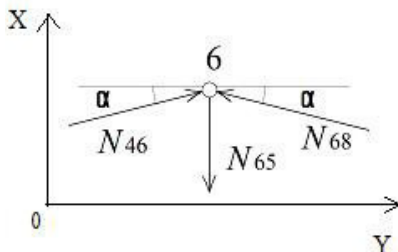


Рис. 4.25

4.4.3. Особенности расчета ферм с полураскосной решеткой

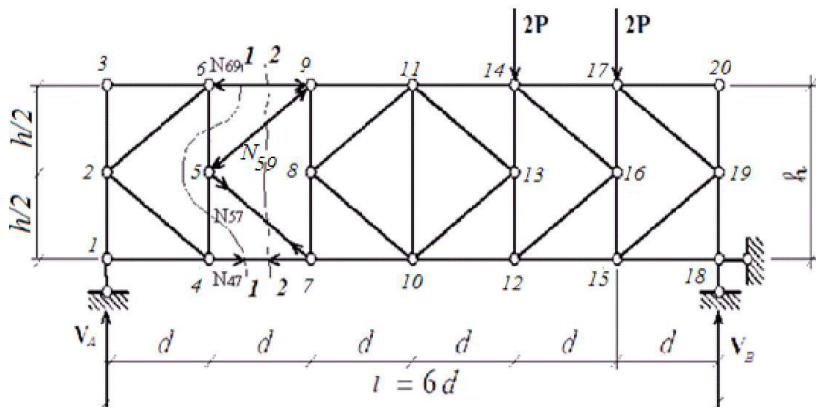


Рис. 4.26

В отличие от рассмотренных выше двух примеров, где линии сечений пересекают три стержня ферм, здесь (рис. 4.26) сквозные сечения 1-1, 2-2 можно провести через четыре стержня, однако и в этом случае можно применить способ моментных точек. Рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4.27) в форме суммы моментов всех сил относительно моментов точки 4.

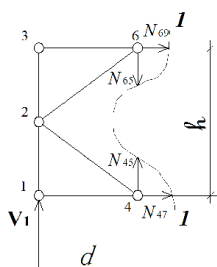


Рис. 4.27

Оно имеет вид:

$$\sum M_4 = V_1 \cdot d + N_{69} \cdot h = 0.$$

Отсюда $N_{69} = -\frac{V_1 \cdot d}{h}$, стержень сжат.

Аналогично для точки 6 уравнение моментов

$$\sum M_6 = V_1 \cdot d - N_{47} \cdot h = 0,$$

откуда $N_{47} = V_1 \cdot \frac{d}{h}$.

Для определения усилий в полураскосах 5-9 и 5-7 сначала рассмотрим равновесие узла 5 (рис. 4.28):

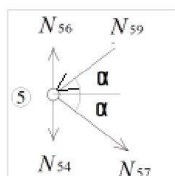


Рис. 4.28

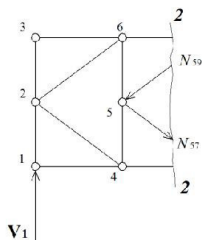
$$\sum X = N_{59} \cdot \cos \alpha + N_{57} \cdot \cos \alpha = 0,$$

откуда $N_{59} = -N_{57}$.

Из этого соотношения следует, что усилия в полураскосах одинаковы по модулю, но разные по направлению. Проведем сечение 2-2 и рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 4.29).

$$\sum Y = V - N_{59} \cdot \sin \alpha - N_{57} \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда $N_{59} = N_{57} = \frac{V_1}{2 \sin \alpha}.$



Усилия в полустойках N_{78} и N_{89} определяются из равновесия узлов 7 и 9. Например, из равновесия узла 7 (рис. 4.30) определим N_{78} .

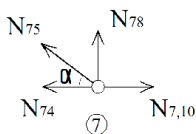


Рис. 4.30

Для этого составляем уравнение равновесия в форме проекций сил в узле на OY :

Рис. 4.29 $\sum Y = N_{78} + N_{75} \cdot \sin \alpha = 0$, откуда $N_{78} = -N_{75} \cdot \sin \alpha$.

Знак «минус» говорит о том, что полустойка 7-8 сжата.

Читателям предлагается определить, сжата или растянута средняя стойка 10-11 фермы (рис. 4.26).

4.4.4. Способ замкнутых сечений

Этот способ применяют в тех случаях, когда в ферме (рис. 4.31) можно выделить некоторый диск (1-2-3), связанный с остальной частью фермы тремя стержнями (1-6, 2-4 и 3-5). Вырезав этот диск замкнутым сечением, рассматриваем его равновесие (рис. 4.31).

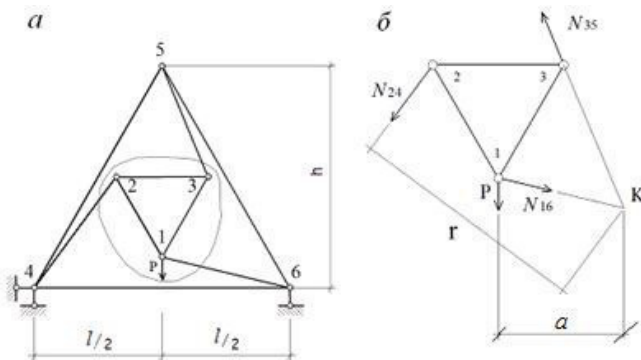


Рис. 4.31

Составим уравнение:

$$\sum M_K = P \cdot a + N_{24} \cdot r = 0, \text{ откуда } N_{24} = -P \cdot \frac{a}{r}.$$

Дальнейший расчет может быть выполнен способом вырезания узлов.

4.4.5. Метод замены стержней (способ Геннеберга)

Рассмотренные выше способы определения усилий в простейших фермах нельзя использовать для сложных ферм (рис. 4.32, а, б), таких, в которых нет двустержневых узлов и в которых нельзя провести сквозное сечение через три стержня.

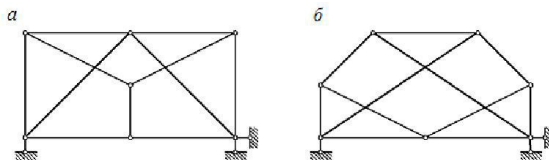


Рис. 4.32

Расчет таких ферм проводят методом замены стержней. Сущность метода рассмотрим на примере фермы (рис. 4.33, а).

Необходимое условие геометрической неизменяемости определяем из условий $C = 2U$, оно выполняется. Преобразуем заданную ферму (рис. 4.33, а) в простейшую, явно геометрически неизменяемую (рис. 4.33, б) путем замены стержня 3-7 стержнем 6-7.

Для фермы (рис. 4.33, а) это условие выполняется.

Количество степеней $C = 14$, а узлов – 7, т. е. $14 = 2 \cdot 7$.

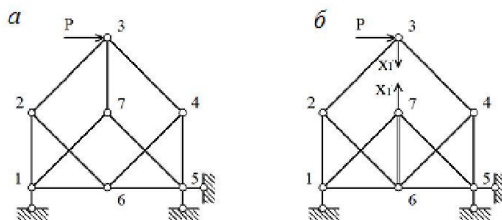


Рис. 4.33

Стержень 3-7 будем называть «заменяемым», а 6-7 – «заменяющим». Усилия в преобразованной системе могут быть найдены способом вырезания узлов от любой нагрузки.

На основании принципа независимости действия сил, усилие N_2 в любом элементе преобразованной (а следовательно, и заданной системы) может быть найдено по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_{i1} \cdot X_1, \quad (4.1)$$

где N_{ip} – усилие в основной системе от заданной нагрузки P ;

N_{i1} – то же, от силы $X_1 = 1$, приложенной в узлах 3 и 7 в заменяемом стержне 3-5.

По этой же формуле определится усилие в заменяющем стержне:

$$N_{67} = N_{67,p} + \bar{N}_{67,1} \cdot X_1 = 0,$$

откуда $X_1 = -\frac{N_{67,p}}{\bar{N}_{67,1}}$. Это уравнение выражает собой, что усилие в заменяющем стержне 6-7 должно быть равно нулю, т. к. в заданной ферме этого стержня нет.

По найденному значению X_1 с помощью формулы (4.1) можно определить усилия во всех стержнях заданной системы.

4.5. Линии влияния в стержнях ферм

Понятие линии влияния для балок дано в главе 3. Для ферм линий влияния (ЛВ) называется график, показывающий изменение продольной силы в каком-либо стержне при перемещении вертикального груза $P=1$ по горизонтальной линии нижнего или верхнего поясов фермы.

Рассмотрим построение ЛВ усилий в стержнях балочной фермы (рис. 4.34, а). ЛВ опорных реакции V_A и V_B имеют точно такой же вид, как и для однопролетной шарнирно опертой балки (рис. 4.34, б, в).

Пусть нагрузка $P=1$ перемещается по нижнему поясу – езда понизу.

Линия влияния усилия N_1 . Сечением 1-1 разрезаем ферму на две части и рассматриваем два случая расположения нагрузки.

$P=1$, *левее узла 3.* Рассмотрим равновесие правой части фермы:

$$\sum M_3^{\text{пр}} = V_B \cdot 5d - N_1 \cdot h = 0, \text{ откуда } N_1 = V_B \frac{5d}{h}.$$

Это означает, что ЛВ N_1 подобна ЛВ V_B , у которой все ординаты умножены на $\frac{5d}{h}$. Действительная часть только там, где находится груз $P=1$, т. е. левее узла 3. Это левая прямая (рис. 4.32, з).

При расположении груза $P=1$ правее узла 4. Рассматриваем левую часть фермы:

$$\sum M_3^{\text{лев}} = V_A \cdot 3d - N_1 \cdot h = 0,$$

откуда $N_1 = V_A \frac{3d}{h}$. Значит ЛВ N_1 подобна реакции ЛВ V_A , у которой все ординаты умножаются на $\frac{3d}{h}$.

Действительна та часть, которая расположена правее узла 4, т. е. где находится груз $P=1$ (рис. 4.34, з).

Линия между узлами рассеченной панели 3-4 является передаточной прямой. В данном случае она совпадает с правой прямой.

Линия влияния N_2 . Все приведенные рассуждения при построении ЛВ N_1 остаются в силе. Отличие заключается в том, что моментной точкой является узел 4, и знак будет «минус», т. к. верхний пояс балочной фермы сжат (рис. 4.34, д).

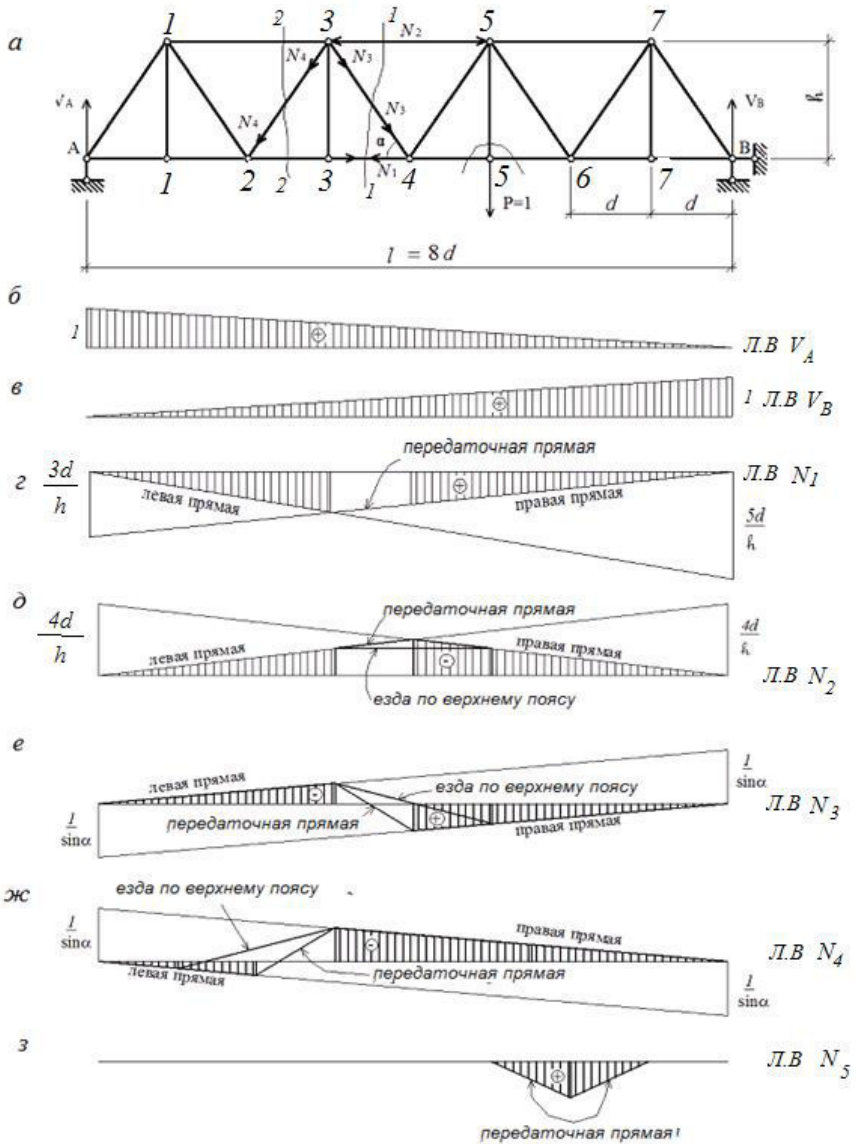


Рис. 4.34

Линия влияния N_3 . При $P=1$ левее узла 3 составим уравнение равновесия для правой части фермы:

$$\sum Y^{\text{пр}} = V_B - N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда $N_3 = V_B \frac{1}{\sin \alpha}$ (раскос сжат).

ЛВ N_3 подобна ЛВ V_B , у которой все ординаты надо разделить на $\sin \alpha$ (рис. 4.34, е).

При $P=1$ правее узла 4 рассмотрим равновесие левой части фермы:

$$\sum Y^{\text{лев}} = V_A - N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда $N_3 = V_A \frac{1}{\sin \alpha}$ (раскос растянут).

ЛВ N_3 подобна ЛВ V_A , у которой все ординаты надо разделить на $\sin \alpha$ (рис. 4.34, е).

Линия влияния усилия N_4 . Для определения усилия N_4 проведем сквозное сечение 2-2. Рассматриваем случай, когда груз $P=1$ левее узла 2. Из уравнения суммы проекций сил на ось Y $\sum Y^{\text{гд}} = V_B - N_4 \cdot \sin \alpha = 0$ найдем $N_4 = V_B \frac{1}{\sin \alpha}$ (раскос растянут). При $P=1$ правее узла 3. Составим

$$\sum Y^{\text{лев}} = V_A - N_4 \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда $N_4 = V_A \frac{1}{\sin \alpha}$ (сжатие).

Дальнейшие рассуждения такие же, как и для ЛВ N_3 (рис. 4.34, ж).

Линия влияния усилий N_5 . Усилие в стойке 5-5 рациональнее определить из равновесия узла 5 (рис. 4.34, а). Возможны два варианта расположения нагрузки $P=1$.

При положении $P=1$ в узле 5 путем вырезания узла 5 из уравнения $\sum Y = 0$ находим, что $N_5 = 1$ (растянут).

При положении $P=1$ вне узла 5 $N_5 = 0$.

Линия влияния N_5 после проведения передаточных прямых показана на рис. 4.34, з. На ЛВ N_2 , N_3 и N_4 (рис. 4.34, г, д, е соответственно) штриховой линией показаны передаточные прямые перемещений груза $P=1$ по верхнему поясу.

Рассмотрим другие случаи построения линий влияния. Пусть в ферме (рис. 4.35, а) требуется построить линии влияния усилий в стойках N_1 и N_2 .

Линия влияния усилия N_1 . Проведем сечение 1-1. Моментная точка – О.

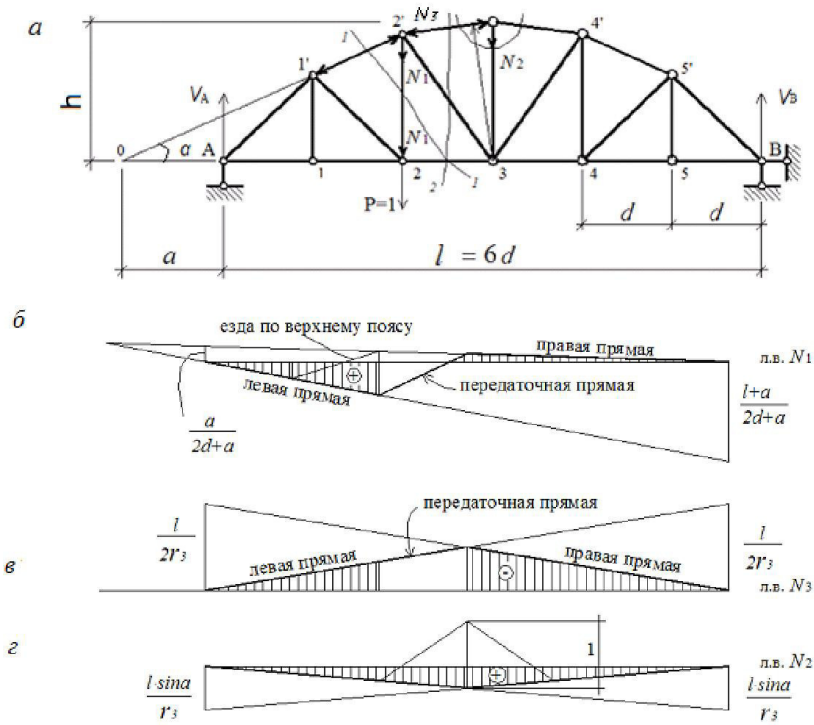


Рис. 4.35

$P=1$ левее узла 2.

$$\sum M_0^{\text{пр}} = V_B \cdot (l+a) - N_1 \cdot (2d+a) = 0;$$

$$N_1 = V_B \frac{l+a}{2d+a} \text{ (растяжение).}$$

$P=1$ правее узла 3.

$$\sum M_0^{\text{лев}} = V_B \cdot a - N_1 \cdot (2d+a) = 0;$$

$$N_1 = V_A \frac{a}{2d+a} \text{ (сжатие).}$$

Линия влияния N_1 показана на рис. 4.35, б.

Линия влияния N_2 . Усилие N_2 находим из равновесия узла 3' (рис. 4.36).

$$\sum X = N_3 \cdot \cos \alpha - N_3' \cdot \cos \alpha = 0, \quad N_3' = N_3.$$

$$\sum Y = 2N_3 \cdot \sin \alpha - N_2 = 0.$$

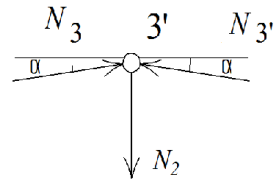


Рис. 4.36

$$N_2 = N_3 \cdot 2 \sin \alpha \text{ (растяжение).}$$

Предварительно надо построить ЛВ N_3 .

Для этого проведем сечение 2-2. При $P = 1$ левее узла 2:

$$\sum M_3^{\text{пр}} = V_B \cdot \frac{l}{2} - N_3 \cdot r_3 = 0;$$

$$N_3 = V_B \cdot \frac{l}{2r_3} \text{ (сжатие).}$$

При $P = 1$ правее узла 3:

$$\sum M_0^{\text{лев}} = V_A \cdot \frac{l}{2} - N_3 \cdot r_3 = 0;$$

$$N_3 = V_A \cdot \frac{l}{2r_3} \text{ (сжатие).}$$

Линия влияния N_3 показана на рис. 4.35, в.

Линия влияния N_2 (рис. 4.35, г) будет подобна ЛВ N_3 , у которой все ординаты умножены на $-2 \cdot \sin \alpha$, т. е. крайние ординаты будут равны $\frac{l}{2r_3} \cdot 2 \sin \alpha = \frac{l \cdot \sin \alpha}{r_3}$.

Анализируя линии влияния усилий, приведенных на рис. 4.34 и 4.35, можно сделать следующие выводы:

1. Левая и правая прямые пересекаются под моментной точкой.
2. Если моментная точка находится между опорами, то линия влияния одного знака.
3. Если моментная точка расположена за пределами опор (слева или справа), то линия влияния меняет знак.

4.5.1. Линии влияния усилий в стержнях консольных ферм

Рассмотрим на примере двух консольных ферм.

Пример 4.3

Построить линии влияния усилий в стержнях 4-5, 4-4' и 5-4' фермы, изображенной на рис. 4.37, а, при движении единичного груза $P = 1$ по верхнему поясу.

Для определения усилий применим способ сквозных сечений и будем рассматривать равновесие консольной части фермы.

Линия влияния N_{45} . Проведем сечение 1-1 и составим уравнение равновесия в форме суммы моментов сил относительно точки 4' левой части.

$$\sum M_{4'} = 1 \cdot x - N_{45} \cdot r_1 = 0.$$

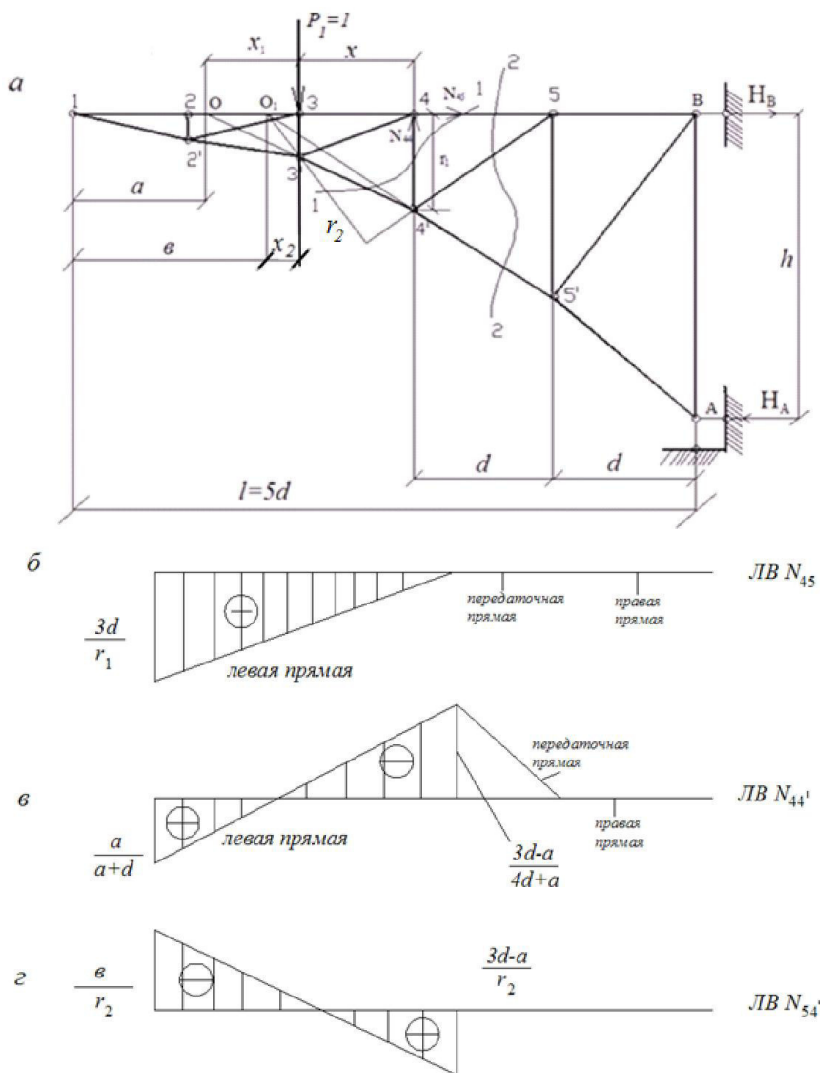


Рис. 4.37

Отсюда $N_{45} = 1 \cdot \frac{x}{r_1}$ (растяжение). Это уравнение прямой линии. При $x=0$ (сила $P=1$ в узле 4) $N_{45} = 0$. При $x=3d$ $x=0$ (сила $P=1$ в узле 1) $N_{45} = \frac{3d}{r_1}$. При $P=1$ правее узла 5 $N_{45} = 0$. Линия влияния N_{45} показана на рис. 4.37, б.

Линия влияния усилия $N_{4-4'}$ в стержне 4-4'. Груз находится $P=1$ левее узла 4. Составляем уравнение равновесия в форме моментов для части фермы левее сечения 1-1.

В качестве моментной точки принимаем точку 0.

$$\sum M_0 = 1 \cdot x_1 - N_{44'} \cdot (x_1 + d) = 0,$$

отсюда $N_{44'} = 1 \cdot \frac{x_1}{x_1 + d}$ (сжатие).

Линия влияния $N_{4-4'}$ изображена на рис. 4.37, в.

При $x_1 = 0$ $N_{44'} = 0$; при $x_1 = -a$ $N_{44'} = -\frac{a}{a+d}$; при $x_1 = 3d - a$ $N_{44'} = \frac{3d-a}{3d-a}$.

Для определения усилия $N_{54'} = 0$ проведем сечение 2-2 и составим уравнение:

$$\sum M_{0_1} = 1 \cdot x_2 - N_{54'} \cdot r_2 = 0,$$

отсюда $N_{54'} = 1 \cdot \frac{x_2}{r_2}$. При $x_2 = 0$ $N_{54'} = 0$; при $x_2 = 3d - b$ $N_{54'} = \frac{3d-b}{r_2}$.

Линия влияния $N_{54'}$ показана на рис. 4.37, г.

Пример 4.4

Построить линию влияния усилий в стержнях 3-3' и 3-4' консольной фермы (рис. 4.38, а). Необходимо заметить, что при построении линии влияния N_{jk} мы предполагаем, что осуществляется узловая передача нагрузки.

Линия влияния усилия $N_{33'}$. Проведем сечение 1-1. Пусть груз $P=1$ находится правее узла 3. Составляем уравнение равновесия в форме моментов для правой части фермы относительно точки О:

$$\sum M_0 = 1 \cdot x - N_{33'} \cdot (b + 3d) = 0,$$

отсюда $N_{33'} = 1 \cdot \frac{x}{b + 3d}$. Это уравнение прямой.

При $x = b$ $N_{33'} = 1 \cdot \frac{b}{b + 3d}$; при $x = b + 3d$ $N_{33'} = 1$; при $P=1$ левее узла 2

$N_{33'} = 0$.

Линия влияния $N_{33'}$ показана на рис. 4.38, б.

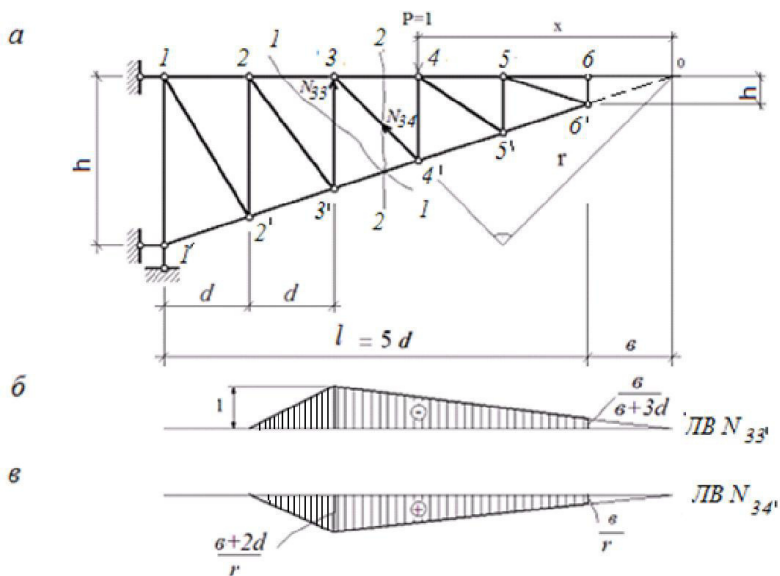


Рис. 4.38

Линия влияния усилия N_{34} . Для определения усилия N_{34} , проведем сечение 2-2. Когда груз $P=1$ расположен левее узла 3, усилие $N_{34}=0$ (из $\sum M_0^{\text{конс}} = 0$).

При $P=1$ правее узла 4 уравнение равновесия будет $\sum M_0^{\text{конс}} = 1 \cdot x - N_{34} \cdot r = 0$. Откуда $N_{34} = \frac{x}{r}$.

Для определения положения этой прямой вычислим две точки: при $x=b$ $N_{34} = \frac{b}{r}$; при $x=b+2d$ $N_{34} = \frac{b+2d}{r}$.

Линия влияния N_{34} показана на рис. 4.38, в.

4.6. Определение перемещений в фермах

Перемещение узлов ферм, как и перемещения в балках и рамах, определяется по формуле Мора.

Применительно к фермам формула Мора имеет вид:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_{(i)} \frac{N_i N_p}{EA} dx = \sum \frac{N_i \cdot N_p \cdot l_i}{EA}.$$

Здесь N_i и N_p – продольные силы в стержнях фермы в единичном и грузовом состояниях; l_i – длина стержней; EA – жесткость стержней при растяжении (сжатии). Суммирование ведется по всем элементам фермы.

Пример 4.5

Определить вертикальное перемещение среднего узла C балочной фермы (рис. 4.39, а). Площадь поперечных сечений во всех стержнях поясов одинакова и равна $2A$, а в стержнях решетки – A . Модуль упругости – E .

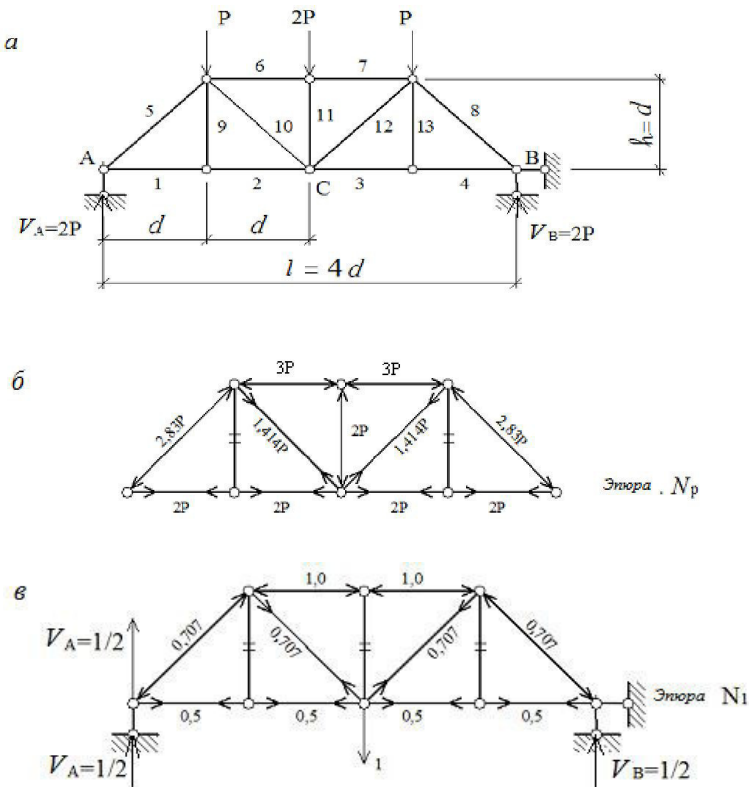


Рис. 4.39

Решение

Опорные реакции в виду симметрии нагрузки будут одинаковы и равны $V_A = V_B = 2P$. Определение усилий от заданной нагрузки: выполняем часть способом вырезания узлов, часть способом сквозных сечений. Значение N_p представлено на рис. 4.39, б. Аналогичным образом определяем усилия во всех

стержнях фермы от единичной силы, приложенной в узле C . Усилия N_i показаны на рис. 4.39, в.

Вычисление вертикального перемещения в узле фермы выполнено по формуле $Y_C = \Delta_{ip} = \sum_{i=1}^{13} \frac{N_p \cdot N_i \cdot l}{EA}$.

Данные для расчета приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

	№ стержней	Длина l	Жесткость EA	Усилия N_p	Усилия N_i	$\frac{N_p \cdot N_i \cdot l}{EA}$
Нижний пояс	1	d	$2EA$	$2P$	0,5	$\frac{P \cdot d}{2EA}$
	2	d	$2EA$	$2P$	0,5	$\frac{P \cdot d}{2EA}$
	3	d	$2EA$	$2P$	0,5	$\frac{P \cdot d}{2EA}$
	4	d	$2EA$	$2P$	0,5	$\frac{P \cdot d}{2EA}$
Верхний пояс	5	$1,414d$	$2EA$	$-2,83P$	$-0,707$	$\frac{1,414P \cdot d}{2EA}$
	6	d	$2EA$	$-3P$	$-1,0$	$\frac{3P \cdot d}{2EA}$
	7	d	$2EA$	$-3P$	$-1,0$	$\frac{3P \cdot d}{2EA}$
	8	$1,414d$	$2EA$	$-2,83P$	$-0,707$	$\frac{1,414P \cdot d}{2EA}$
Решетка	9	d	EA	0	0	0
	10	$1,414d$	EA	$1,414P$	$0,707$	$\frac{1,414P \cdot d}{EA}$
	11	d	EA	$-2P$	0	0
	12	$1,414d$	EA	$1,414P$	$0,707$	$\frac{1,414P \cdot d}{EA}$
	13	d	EA	0	0	0

Суммарное значение последней колонки равно

$$\sum_{i=1}^{n=13} \frac{N_p N_i}{EA_i} = 9,24 \frac{Pd}{EA}.$$

Перемещение узла C фермы равно

$$Y_C = 9,24 \frac{Pd}{EA}.$$

4.7. Квазиоптимальное проектирование ферм

Квазиоптимальная система – это система, которой соответствует не наименьшее значение критерия качества, а близкое к нему.

Исследование структуры стоимости металлических конструкций (в т. ч. ферм) показывает, что стоимость материалов составляет около 2/3 от общей стоимости возведения сооружения. Поэтому важнейшее условие поиска рационального решения – снижение расхода материала. Рассмотрим элемент рационального проектирования на примере расчета фермы.

Пример 4.6

Найти оптимальную высоту h статически определимой фермы (рис. 4.40) так, чтобы объем ее был наименьшим при ограничении по условию прочности, известна нагрузка P , размер d, l , а также расчетное сопротивление R .

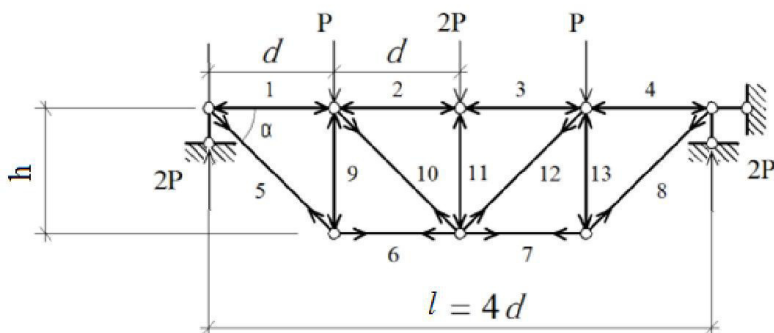


Рис. 4.40

Требуется определить h .

Это задача математического программирования:

$$\min V(h) = \sum_{i=1}^{13} A_i \cdot l_{\text{лет}}$$

при ограничении $\frac{|N_{\text{лет}}|}{A_{\text{лет}}} - R_{\text{лет}} \leq 0, \quad R_{\text{лет}} = R = \text{const}.$

Решение

1. Геометрические характеристики:

$$l_5 = l_{10} = l_{12} = l_8 = \sqrt{h^2 + d^2},$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{d},$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}}.$$

2. Усилия в элементах фермы:

$$N_{11} = -2P, \quad N_9 = N_{13} = -2P, \quad N_5 = N_8 = 2P \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{h},$$

$$N_{10} = N_{12} = P \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{h}, \quad N_6 = N_7 = 2P \frac{d}{h},$$

$$N_1 = N_4 = -2P \frac{d}{h}, \quad N_2 = N_3 = -3P \frac{d}{h}.$$

3. Подбор сечения из условия прочности $\sigma = \frac{N}{A} \leq R$:

$$A_1 = A_4 = A_6 = A_7 = \frac{|N_1|}{R} = \frac{2P}{R} \cdot \frac{d}{h},$$

$$A_2 = A_3 = \frac{|N_2|}{R} = \frac{3P}{R} \cdot \frac{d}{h},$$

$$A_5 = A_8 = \frac{N_5}{R} = \frac{2P}{R} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{h},$$

$$A_9 = A_{11} = A_{13} = \frac{|N_9|}{R} = \frac{2P}{R},$$

$$A_{10} = A_{12} = \frac{N_{10}}{R} = \frac{P}{R} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{h}.$$

4. Объем всех стержней фермы:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{13} A_i \cdot l_i = 2 \cdot (A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3 + A_4 l_4 + A_5 l_5 + A_6 l_6 + A_7 l_7 + A_{10} l_{10} + \frac{1}{2} \cdot A_{11} l_{11}) = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2P}{R} \cdot \frac{d}{h} \cdot d + \frac{3P}{R} \cdot \frac{d}{h} + \frac{2P}{R} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{h} \cdot \sqrt{h^2 + d^2} + \frac{2P}{R} \cdot \frac{d}{h} \cdot d + \frac{P}{R} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{h} \cdot \sqrt{h^2 + d^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{R} \cdot h \right) = \frac{2P}{R} \cdot \frac{6h^2 + 10d^2}{h}. \end{aligned}$$

5. Исследование полученной функции $V(h)$ на экстремум:

а) число экстремумов

$$\frac{d^2 V}{dh^2} = \frac{d}{dh} \left\{ \frac{d}{dh} \left(\frac{2P}{R} \cdot \frac{6h^2 + 10d^2}{h} \right) \right\} = \frac{d}{dh} \left\{ \frac{2P}{R} \left(6 - \frac{10d^2}{h^2} \right) \right\} = \frac{2P}{R} \cdot \frac{20d^2}{h^3} > 0,$$

т. е. функция $V(h)$ выпуклая и имеет один экстремум.

$$\text{б) } \frac{dV}{dh} = 0 \quad \text{или} \quad 6 - \frac{10d^2}{h^2} = 0. \quad h^2 = \frac{10d^2}{6} = \frac{5}{3} d^2,$$

откуда $h = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot d$ или $h = 1,29d$.

6. Минимальный объем фермы V :

$$V_{\min} = \frac{2P}{R} \cdot \frac{6 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{3}} d \right)^2 + 10d^2}{\sqrt{\frac{5}{3}} d} = \frac{2P}{R} \cdot \frac{20d^2}{1,29d} = 31 \frac{Pd}{R}.$$

Пусть $P = 100 \text{ кН}$, $d = 3 \text{ м}$, $R = 210 \text{ МПа}$

Тогда $h = 1,29 \cdot 3 = 3,87 \text{ м}$, а объем $V = 31 \cdot \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 3}{210 \cdot 10^6} = 4,43 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$.

Приведенный расчет является первым приближением оптимизации объема фермы, т. к. при определении поперечных сечений сжатых элементов не учтена возможная потеря устойчивости сжатых элементов.

5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

5.1. Основные понятия

Рамой называется стержневая система, стержни которой во всех или некоторых узлах соединены между собой жестко (бесшарнирно). Рамы бывают плоские и пространственные, они широко используются в строительстве и могут быть металлическими, железобетонными и деревянными. На рис. 5.1 показана схема цеховой рамы, здесь же показаны стропильная ферма (служит для поддержания кровли) и подкрановая ферма. Следует заметить, что нижняя часть рамы более массивная (больше жесткость EI), т. к. несет большую нагрузку.

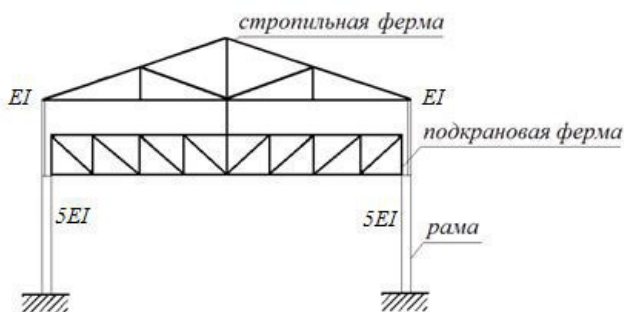


Рис. 5.1

Элементы рамы, применяемые в строительных конструкциях, мало отклоняющиеся от вертикали, называются стойками, а мало отклоняющиеся от горизонтали – ригелями. Ригели бывают горизонтальные, наклонные, ломаные, криволинейные. В соответствии с этим встречаются рамы разного очертания (рис. 5.2, *а, б, в, г, д, е*).

Рамы бывают с двумя стойками – однопролетные (рис. 5.2, *а, б, в, г*), с несколькими стойками – многопролетные (рис. 5.2, *д, е*), одноэтажные (рис. 5.2, *а, б, в, г, д*) и многоэтажные (рис. 5.2, *е*).

Рамы подразделяются на простые (рис. 5.2, *а, б, в, г*) и сложные (составные) (рис. 5.2, *д, е*), статически определимые (рис. 5.2, *а*) и статически неопределимые (рис. 5.2, *б, в, г, д, е*).

Статически определимыми называют такие рамы, в которых опорные реакции, внутренние усилия в стержнях могут быть определены с помощью уравнений равновесия статики.

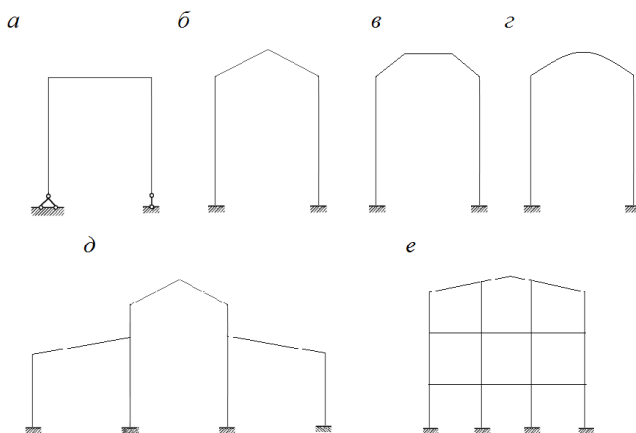


Рис. 5.2

В таких рамах число неизвестных усилий для плоских рам не превышает трех, а для пространственных – шести. Если число неизвестных реакций (усилий) превышает число неизвестных уравнений статики, которые можно составить для рамы, то она является *статически неопределимой*.

При расчете рам прежде всего необходимо убедиться, что рама является геометрически неизменяемой и статически определимой конструкцией.

Необходимым условием статической определимости и признаком геометрической неизменяемости является равенство нулю степени свободы W системы, которая устанавливается по формуле, предложенной Чебышевым (1870 г.):

$$W = 3Д - 2Ш - C_0, \quad (5.1)$$

где $Д$ – число дисков; $Ш$ – число простых (одиночных) внеопорных шарниров, связывающих диски; C_0 – число опорных стержней.

1) При этом если $W > 0$, то система геометрически изменяема и в ней недостаточное число связей.

Такие системы представлены на рис. 5.3.

а

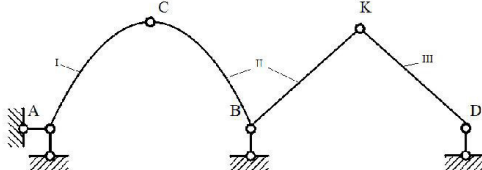
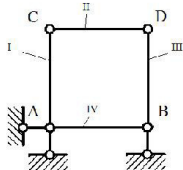


Рис. 5.3

Для схемы 5.3, а
 $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 = 1.$

Для схемы 5.3, б
 $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$

2. В случае, когда $W < 0$, система имеет лишние связи (геометрически неизменяема), число которых и определяет степень статической неопределимости, обозначаемой в дальнейшем n . Так, для рамы (рис. 5.2, б, в, г) $W = 3 \cdot 1 - 0 - 6 = -3$, т. е. степень статической неопределимости $n = -W = 3$.

3. Если $W = 0$, система может быть геометрически неизменяемой и статически определимой при условии правильного расположения всех стержней (рис. 5.4, а).

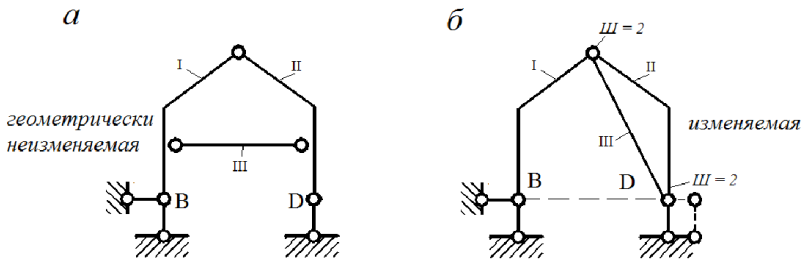


Рис. 5.4

Схема 5.4, а

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Схема 5.4, б

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Система (рис. 5.4, б) удовлетворяет условию (5.1), но является изменяемой, т. е. шарнир D имеет возможность перемещаться по линии BD .

Поэтому важно проанализировать структуру системы, рассмотреть, как она образована, как расположены связи между элементами системы, проверить, не является ли система мгновенно изменяемой.

Под мгновенно изменяемой системой понимают такую, которая допускает бесконечно малое перемещение точек системы без изменения формы (длины) ее элементов (рис 5.5, б).

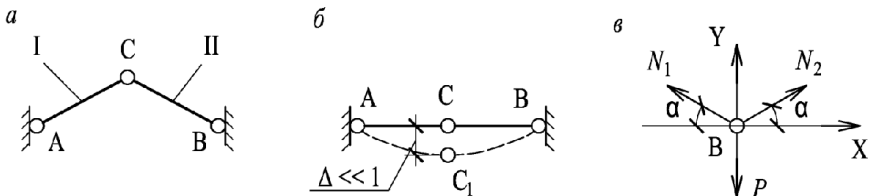


Рис. 5.5

Система, показанная на рис 5.5, б, является мгновенно изменяемой.

Из равновесия узла (рис. 5.5, в) получаем

$$\sum Y = 0 ; 2N_1 \sin \alpha - P = 0 . \quad N = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \infty, \text{ при } \alpha = 0.$$

Таким образом, в мгновенно изменяемых системах даже при очень малых нагрузках усилия в элементах могут достигать теоретически бесконечно больших значений. Геометрически изменяемые и мгновенно изменяемые системы в сооружениях недопустимы.

Проверка системы на мгновенную изменяемость производится путем анализа геометрической структуры системы, основанная на принципах образования геометрически неизменяемых систем.

5.2. Определение внутренних усилий в элементах рам

В общем случае в поперечных сечениях стержней рамы возникает поперечная сила Q , изгибающий момент M и продольная сила N . При вычислении Q , M , N используем те же приемы и правила, что и в балках при их изгибе.

При вычислении внутренних усилий в сечениях элементов рамы условимся считать, что наблюдатель расположен на плоскости чертежа внутри контура рамы и обращен к сечению, в котором определяется усилие. При расчете точка наблюдателя является фиксированной и отмечается крестиком. При переходе от стержня к стержню наблюдатель стоит на одном и том же месте, но поворачивается каждый раз лицом к стержню, который рассматривается. Это необходимо сделать для того, чтобы было ясно, какую отсеченную часть рамы следует считать левой, а какую правой.

Поперечную силу в сечении будем определять как алгебраическую сумму проекций всех внешних сил, приложенных к элементам части рамы, расположенной по одну сторону от этого сечения, на ось, перпендикулярную к оси рассматриваемого элемента.

Поперечная сила считается положительной, если вызывающая ее внешняя сила при рассмотрении левой отсеченной части рамы стремится сдвинуть эту часть в направлении от наблюдателя или, при рассмотрении правой части, приблизить последнюю к наблюдателю. Если же внешняя сила стремится приблизить левую часть рамы к наблюдателю или правую отодвинуть от него, то поперечную силу считают отрицательной.

Изгибающий момент в любом сечении рамы численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к элементам части рамы, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно его центра тяжести (на расчетной схеме рамы – относительно

точки сечения, лежащей на оси соответствующего элемента). Для изгибающих моментов можно пользоваться следующим правилом знаков:

если внешняя сила, вызывающая изгибающий момент, по отношению к наблюдателю, расположенному, как было сказано, стремится повернуть относительно указанной выше точки левую часть рамы по часовой стрелке или правую ее часть против часовой стрелки, то изгибающий момент положительный и его необходимо отложить со стороны внутренних волокон. Если же наблюдателю вращение представляется в противоположном направлении, то изгибающий момент отрицательный и его ординату необходимо отложить со стороны внешних волокон(со стороны растянутых волокон).

При определении продольной силы в сечении все внешние силы, приложенные к элементам части рамы, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения, будем проецировать на продольную ось соответствующего стержня (x).

Продольную силу будем принимать положительной, если внешняя сила вызывает в рассматриваемом сечении растяжение, и отрицательной, если в сечении вызывается сжатие.

При построении эпюр Q , M и N условимся придерживаться следующих правил:

1. Продольная ось стержня принимается за ось абсцисс (x).
2. Вычисленные ординаты эпюр откладываются в соответствующих сечениях перпендикулярно к оси рассматриваемого стержня.
3. Положительные ординаты эпюры Q откладываются вверх от продольной оси стержня, а отрицательные – соответственно вниз, при взгляде на рассматриваемый стержень из точки наблюдателя. Знак на эпюре ставится.
4. Ординаты эпюры M откладываются со стороны растянутых волокон элементов рамы, как в балках при их изгибе. Знак на эпюре не ставится.
5. Ординаты эпюры N можно откладывать симметрично по обе стороны от оси рассматриваемого стержня. Знак на эпюре N обязателен.
6. Штриховка эпюр производится перпендикулярно к оси соответствующего стержня.

Ниже приводятся примеры построения эпюр Q , M , N для рам.

5.3. Простейшие рамы

Балочные рамы – это такие рамы, у которых при вертикальной нагрузке возникают только вертикальные реакции.

Пример 5.1

Для рамы, изображенной на рис. 5.6, построить эпюры внутренних усилий.

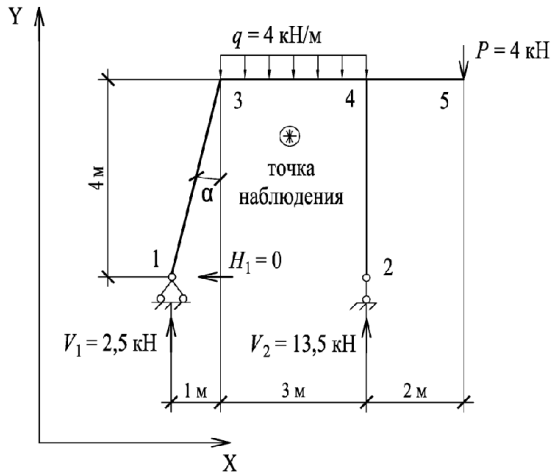


Рис. 5.6

Решение

Рассматриваемая рама является простой (однопролетной и одноярусной). Она статически определимая, т. к. содержит две неизвестные статические реакции, горизонтальная реакция H_1 в опоре 1 равна нулю.

1. Определение реакций опор обычным образом:

составляем уравнение равновесия в форме моментов относительно опор (1) и (2):

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 2 = 0,$$

откуда $V_1 = 2,5$ кН.

$$\sum M_1 = 0; \quad V_2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 2,5 - 4 \cdot 6 = 0,$$

откуда $V_2 = 13,5$ кН.

Для проверки реакции опор используем уравнение в форме проекций всех сил на ось Y .

$$\sum Y = 0,$$

$$V_1 + V_2 - 4 \cdot 3 - 4 = 2,5 + 13,5 - 16 = 16 - 16 = 0.$$

$$\sum X = 0; \quad H_1 = 0.$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов M . Выбираем точку наблюдателя. Она отмечена звездочкой \odot внутри рамы.

При рассмотрении участка элемента 1-3 рационально строить эпюру M , начиная от опоры 1 и двигаясь к узлу 3. В соответствии с методом сечений

$M_{31} = V_1 \cdot l = 2,5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Эпюра M строится на «растянутом» волокне. При изгибе вертикальных и наклонных стоек растянутая зона оказывается или слева, или справа от оси стержня (в горизонтальных балках – внизу или вверх). Чтобы установить, где находится растянутая зона на наклонной стойке 1-3, можно мысленно отбросить опору 1 и представить деформированное состояние стойки (рис. 5.7): растянутая зона располагается внутри контура, т. е. участок 1-3 испытывает изгиб и участок изгибается выпуклостью справа по отношению к наблюдателю. Правые волокна испытывают растяжение.

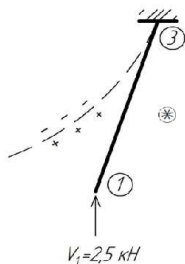


Рис. 5.7

Ордината изгибающего момента $M_{31} = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ откладывается перпендикулярно стержню 1-3. $M_{34} = M_{31}$, т. к. точка 3 одновременно принадлежит и стойке, и ригелю, моменты в них должны быть одинаковыми, и поэтому M_{31} «переходит» от стойки на ригель по правилу циркуля, если в узле нет сосредоточенного внешнего момента. При этом необходимо иметь в виду, что оба момента – на ригеле и на стойке – должны быть снаружи контура или внутри контура, если в узле не приложен сосредоточенный момент. В нашем случае они находятся внутри контура.

Изгибающий момент M_{45} определяем, двигаясь со стороны свободного конца 5: $M_{45} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ – растянутая зонаверху (знаки моментов на горизонтальных участках рамы можно определять, как в балке).

При определении моментов в стойке 2-4 движемся от опоры 2 к узлу 4. По методу сечений рассматриваем нижнюю часть стойки – на нее действует только реакция V_2 , которая стойку сжимает, но не изгибает, поэтому $M_{42} = 0$, соответственно, и поперечная сила в стойке $Q_{24} = 0$.

Момент в узле 4 – M_{43} можно определить из равновесия узла 4 (рис. 5.8, б). При рассмотрении равновесия узла моменты изображаются в виде стрелок. При постановке стрелок моментов в узлах можно воспользоваться правилом: стрелка, изображающая момент в равновесии узла, выходит из эпюры M и

пересекает соответствующий стержень (при этом центр стрелки – в узле). Это правило справедливо при эпюрах M , построенных на «растянутом волокне».

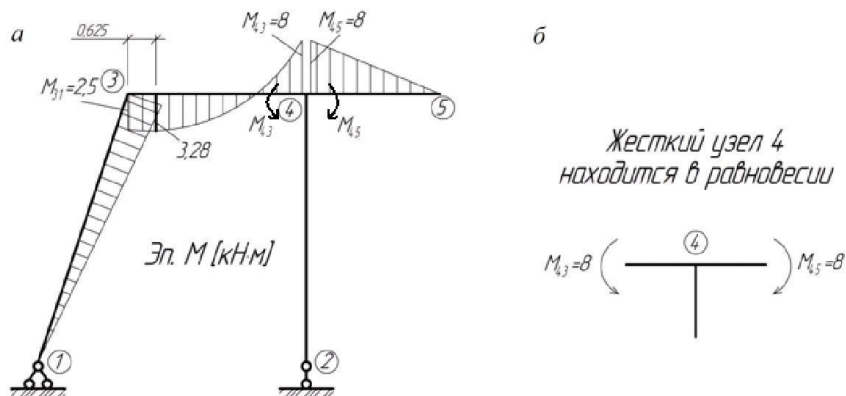


Рис. 5.8

3. Построение эпюры поперечных сил Q .

Из курса «Сопротивление материалов» известно, что поперечная сила Q равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения и заменяет действие отброшенной части на оставшуюся.

Для построения этих поперечных сил последовательно рассматриваем следующие стержни.

Стержень 1-3:

рассматривая часть стержня (1-3) со стороны опоры 1:

$$Q_{13} = V_1 \cdot \sin \alpha = 2.5 \cdot 0.242 = 0.606 \text{ (кН)},$$

где $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = 0.242$.

Поперечная сила положительная, поэтому откладывается ордината со стороны верхних волокон по отношению к наблюдателю (рис. 5.9).

Для построения эпюры Q на ригеле (3-4) находим Q_{3-4} со стороны узла 3

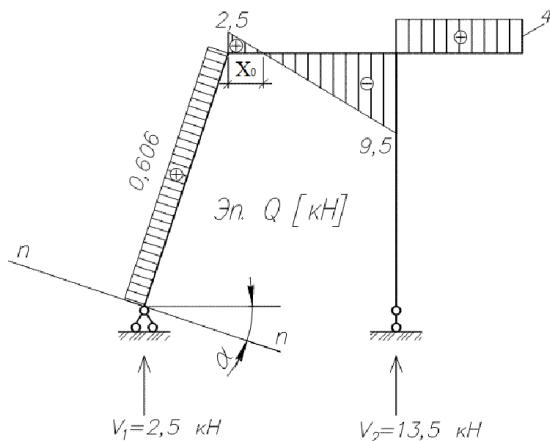


Рис. 5.9

Рассматривая левую часть рамы:

Стержень 3-4:

$$Q_3 = V_1 = 2,5 \text{ кН}; \quad Q_4 = 2,5 - 4 \cdot 3 = -9,5 \text{ кН}.$$

В сечении x_0 , где $Q = 0$ и меняет знак, на эп. M должен быть экстремум. Для определения x_0 необходимо выражение для поперечной силы Q на данном участке приравнять нулю, т. е. $Q = 2,5 - qx_0 = 0$, откуда $x_0 = 0,625$ м и

$$M_{x_0} = V_1 \cdot (1 + 0,625) - \frac{q \cdot 0,625^2}{2} = 3,28 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Участок 4-5 (консоль):

здесь рационально двигаться со стороны свободного конца. Поперечная сила для отсеченной правой части консоли: $Q_{45} = 4 \text{ кН}$.

Построенная эпюра Q для рамы представлена на рис. 5.9.

4. Построение эпюры продольных сил N .

По определению продольная сила N равна сумме проекций на продольную ось данного стержня всех внешних сил, приложенных по одну сторону от этого сечения.

Стержень 1-3:

$$N_{13} = -V_1 \cdot \cos \alpha = -2,5 \cdot 0,97 = -2,425 \text{ кН (сжатие)},$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = 0,97.$$

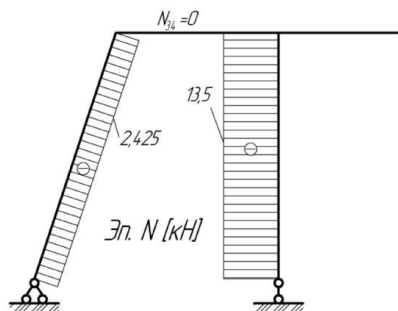


Рис. 5.10

Продольная сила во всех сечениях ригеля (3-4-5)

$$N_{34} = N_{45} = 0.$$

На стойке 2-4 возникает продольная сжимающая сила $N_{24} = -N_{42} = -V_2 = -13,5$ кН. Эпюра продольных сил показана на рис. 5.10.

5. Статическая проверка.

Для проверки правильности построения эпюр Q , M , N рассмотрим равновесие ригеля 3-4.

Мысленно вырежем из рамы сечениями, бесконечно близкими к узлу 3, 4, ригель (рис. 5.11.). В соответствующих сечениях приложим Q , M , N , взятые из эпюр Q , M , N , и внешнюю нагрузку q , действующую на ригель (рис. 5.11).

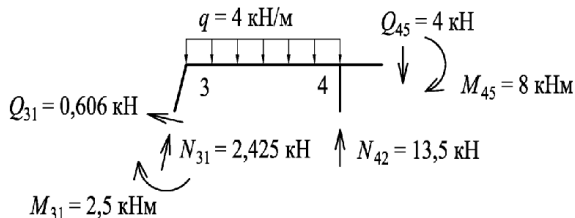


Рис. 5.11

Для равновесия ригеля должны соблюдаться условия:

$$\sum M_3 = N_{42} \cdot 3 - 8 - 2,5 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 = 40,5 - 40,5 = 0.$$

$$\sum X = 0,606 \cdot \cos \alpha - 2,425 \cdot \sin \alpha = 0,606 \cdot 0,97 - 2,425 \cdot 0,242 = 0,587 - 0,587 = 0.$$

$$\sum Y = N_{42} + N_{31} \cos \alpha + Q_{31} \sin \alpha - 4 \cdot 3 - 4 = 13,5 + 2,425 \cdot 0,97 + 0,606 \cdot 0,242 - 12 - 4 = 0.$$

Проверка показывает, что условия равновесия выполняются, значит, внутренние усилия найдены верно.

Примечание: если усилия определены верно, то любой вырезанный узел, любая часть и в целом сама рама под действием внешних и внутренних сил должны находиться в равновесии.

Пример 5.2

Для рамы с наклонной стойкой (рис. 5.12) построить эпюры M , Q , N .

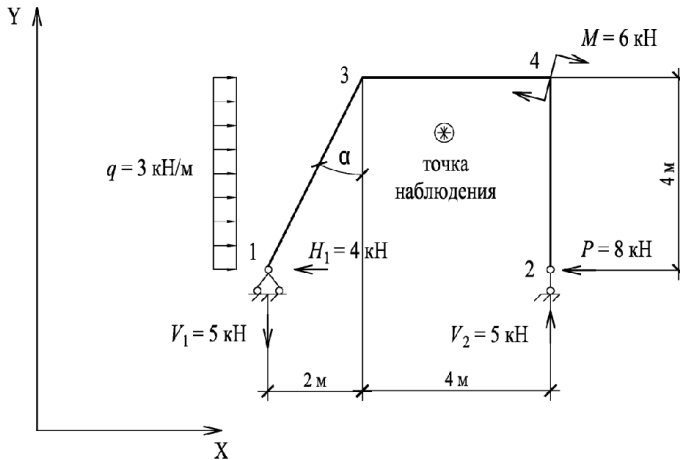


Рис. 5.12

Решение

Вертикальные реакции V_1 и V_2 определяются аналогично примеру 5.1.

Горизонтальная реакция H_1 в опоре 1 определяется из уравнения:

$$\sum X = 0: -H_1 + 3 \cdot 4 - 8 = 0; \quad H_1 = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2 = 0: V_1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 6 = 0; \quad V_1 = 5 \text{ кН}.$$

(предварительное направление V_1 – вниз).

$$\sum M_1 = 0: V_2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 6 = 0; \quad V_2 = 5 \text{ кН}$$

Проверка реакций опор:

$$\sum Y = 0. \quad -V_1 + V_2 = -5 + 5 = 0.$$

2. Построение эпюры изгибающих моментов M .

Наклонная стойка 1-3.

При определении изгибающего момента M_{31} в соответствии с методом сечений учитываем V_1 , H_1 и $q = 3 \text{ кН/м}$. Сечение 3-1, бесконечно близкое к узлу, мысленно рассматриваем как заделку. В соответствии с определением изгибающего момента имеем:

$$M_{31} = H_1 \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - V_1 \cdot 2 = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 2 = 16 - 24 - 10 = -18 \text{ (кН/м)}.$$

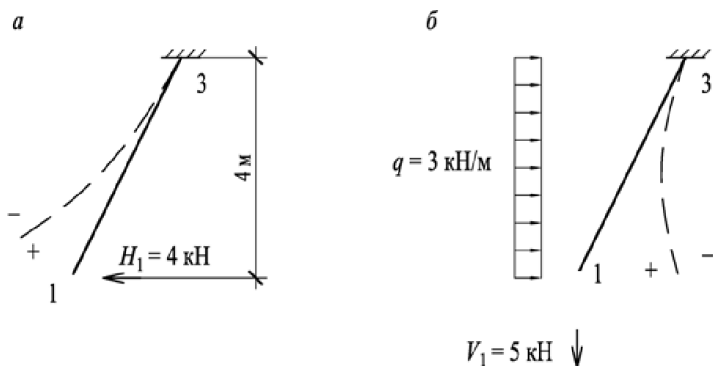


Рис. 5.13

На рис. 5.13 показано деформированное состояние стойки 1-3 от действия H_1 – «растянутая зона» от H_1 – справа. На рис. 5.13, б деформированное состояние этой же стойки – от сил V_1 и распределенной нагрузки q : как видно из рисунка, растянутая зона от них располагается слева. Момент от сил q и V_1 по абсолютной величине больше, чем от H_1 , поэтому результирующий момент $M_{31} = -18$ откладываем слева от оси стержня (рис. 5.14).

Стойка 2-4.

При вычислении изгибающего момента M_{42} учитываем силы, приложенные со стороны опоры 2 до узла 4: это сила $P = 8 \text{ kN}$ (рис. 5.15, а) и реакция V_2 . Вертикальная сила V_2 вызывает только сжатие стойки, а сила P вызывает изгиб.

$$M_{42} = P \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ кНм (растянутая зона справа на рис. 5.15, а).}$$

Ригель 3-4.

Момент на ригеле M_{43} определяем из равновесия узла 4 с учетом сосредоточенного момента $M = 6 \text{ кНм}$, приложенного в узле (рис. 5.15, б):

$$M_{43} = 32 + 6 = 38 \text{ кНм.}$$

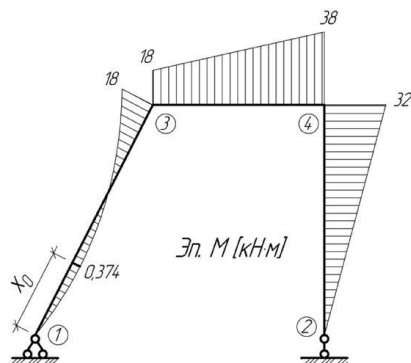


Рис. 5.14

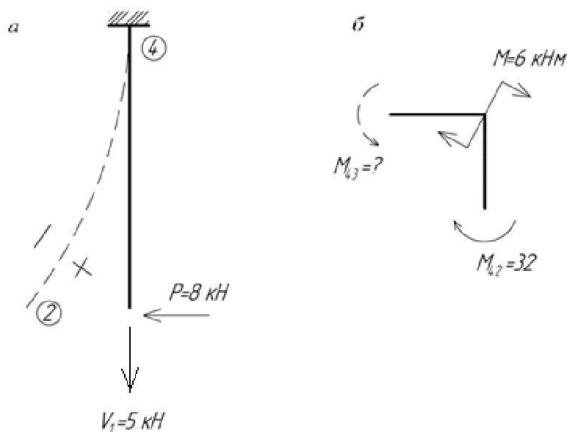


Рис. 5.15

3. Построение эпюры поперечных сил Q .

Стойка 1-3.

Поперечную силу Q_{13} находим из определения: сумма проекций на нормаль к оси (рис. 5.16):

$$Q_{13} = H_1 \cdot \cos \alpha - V_1 \cdot \sin \alpha = 4 \cdot 0,894 - 5 \cdot 0,447 = 1,341 \text{ (кН)},$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,894; \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0,447.$$

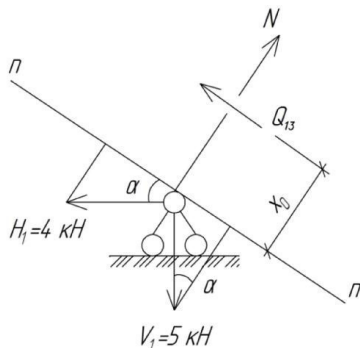


Рис. 5.16

Для сечения 3-1, примыкающего к узлу 3:

$$Q_{31} = Q_{13} - q \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 1,341 - 12 \cdot 0,894 = -9,387 \text{ (кН)}.$$

Для стержня 3-4 имеем:

$$Q_{34} = -V_1 = -5 \text{ кН.}$$

Для стойки 4-2:

$$Q_{42} = Q_{24} = P = 8 \text{ кН.}$$

Эпюра Q приведена на рис. 5.17. По эпюре Q видно, что на эп. M в сечении x_0 должен быть экстремум, $x_0 = 0,558 \text{ м}$: определяем из подобия треугольников, и M при x_0 определяется следующим образом:

$$M_{x_0} = H_1 \cdot 0,558 \cdot \cos \alpha - V_1 \cdot 0,558 \cdot \sin \alpha - q \cdot \frac{(x_0 \cdot \cos \alpha)^2}{2}.$$

$$M_{x_0} = 0,374 \text{ кНм (рис. 5.14).}$$

Этот же момент можно вычислить вторым способом на основе дифференциальной зависимости:

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad dM = Qdx, \quad \text{т.е. } M_{x_0} \text{ равен площади треугольника:}$$

$$M_{x_0} = \frac{1}{2} x_0 \cdot 1,341 = 0,374 \text{ кНм.}$$

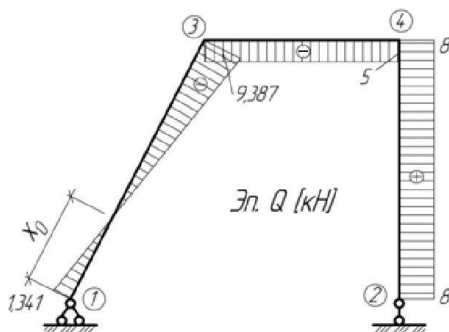


Рис. 5.17

4. Построение эпюры N .

Продольная сила не постоянна по длине стержня 1-3, т. к. наклонный стержень загружен нагрузкой $q = \text{const}$.

Определяем продольные силы в концевых сечениях наклонной стойки 1-3 (рис. 5.18).

$$N_{13} = H_1 \cdot \sin \alpha + V_1 \cdot \cos \alpha = 4 \cdot 0,447 + 5 \cdot 0,894 = 6,258 \text{ (кН) (растяжение).}$$

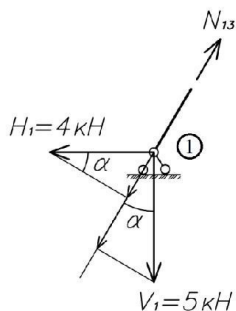


Рис. 5.18

Сечение 3-1.

Усилие N_{31} находим из равновесия наклонного стержня 1-3, вырезанного из рамы, приложив к нему распределенную нагрузку q и продольные силы N_{13} и N_{31} .

$$N_{31} = N_{13} - q \cdot 4 \cdot \sin \alpha = 6,258 - 3 \cdot 4 \cdot 0,447 = 0,894 \text{ (кН) (растяжение)}.$$

На участке ригеля 3-4 продольную силу определяем из равновесия правой части ригеля:

$$N_{34} = -8 \text{ кН (сжатие)}.$$

В вертикальной стойке 2-4 находим продольную силу из равновесия нижней ее части

$$N_{24} = V_2 = -5 \text{ кН (сжатие)}.$$

Эпюра N приведена на рис. 5.19.

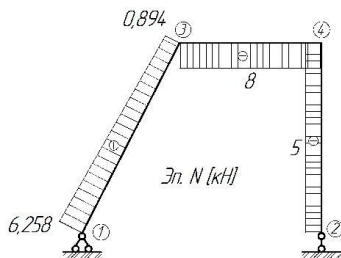


Рис. 5.19

5. Статическая проверка.

Рассмотрим равновесие ригеля 3-4 (рис. 5.20).

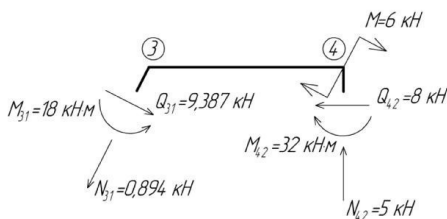


Рис. 5.20

Составим уравнения равновесия для ригеля:

$$\sum M_3 = 18 - 32 + 5 \cdot 4 - 6 = 38 - 38 = 0.$$

$$\sum X = -8 - 0,894 \cdot \sin \alpha + 9,387 \cdot \cos \alpha = -8,4 + 8,4 = 0.$$

$$\sum Y = 5 - 0,894 \cdot \cos \alpha - 9,387 \cdot \sin \alpha = 5 - 0,8 - 4,2 = 0.$$

Равенства соблюдаются, что означает правильность найденных усилий.

Пример 5.3

Для заданной трехшарнирной рамы построить эпюру изгибающих моментов M .

Трехшарнирная рама может быть с опорами на одном уровне или с опорами на разных уровнях. В данном примере рассматривается рама с опорами на одном уровне (рис. 5.21). Рама с опорами на разных уровнях будет рассмотрена ниже, в составе сложной рамы, в примере 5.6.

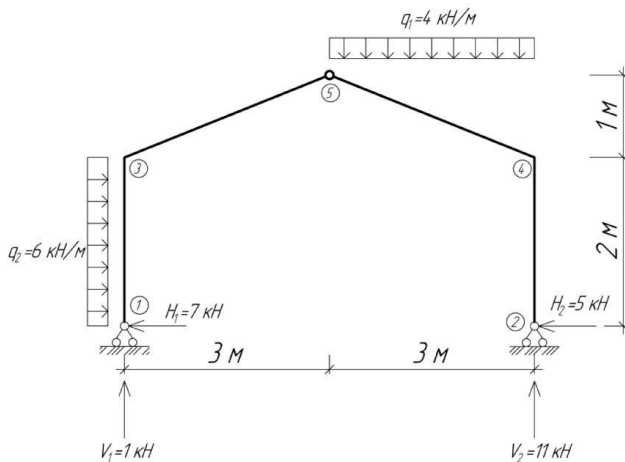


Рис. 5.21

Решение

1. Кинематический и статический анализ рамы.

Степень свободы $W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$.

$D = 2$ – диски 1-3-5 и 5-4-2.

$Ш = 1$ – шарнир 5.

$C_0 = 4$ – опорные связи на опорах 1 и 2.

Структурный анализ: три диска (третий диск – земля) соединены тремя шарнирами (1, 5, 2), не лежащими на одной прямой, что является признаком геометрической неизменяемости. Степень статической неопределимости $n = 3 \cdot K - Ш = 3 \cdot 1 - 3 = 0$, $K = 1$ – один замкнутый контур и 3 шарнира, т. е. рама статически определима.

2. Определение реакций опор из равновесия рамы в целом.

$$\sum M_2 = 0.$$

$$-V_1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 0; V_1 = 1 \text{ кН.}$$

$$\sum M_1 = 0.$$

$$V_2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \cdot 4,5 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 0; V_2 = 11 \text{ кН.}$$

Проверка вертикальных реакций. Должно соблюдаться условие равновесия

$$\sum Y = 0: V_1 + V_2 - 4 \cdot 3 = 1 + 11 - 12 = 12 - 12 = 0.$$

Определяем опорные реакции H_1 и H_2 .

Составляем уравнение в форме моментов для левой и правой частей рамы.

$$\sum M_5^{\text{левых сил}} = 0.$$

$$-H_1 \cdot 3 - V_1 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = 0; H_1 = 7 \text{ кН.}$$

$$\sum M_5^{\text{правых сил}} = 0.$$

$$-H_2 \cdot 3 + V_2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; H_2 = 5 \text{ кН.}$$

Проверка горизонтальных реакций. Должно быть $\sum X = 0$:

$$-H_1 - H_2 + 6 \cdot 2 = -7 - 5 + 12 = 0.$$

4. Построение эпюры M (рис. 5.22).

Определяем моменты в концевых сечениях участков и строим эпюру моментов (рис. 5.22).

$$M_{31} = H_1 \cdot 2 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \text{ кНм (растянутая зона справа).}$$

$$M_{35} = M_{31} = 2 \text{ кНм.}$$

$$M_{42} = H_2 \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кНм (растянутая зона справа).}$$

$$M_{45} = M_{42} = 10 \text{ кНм.}$$

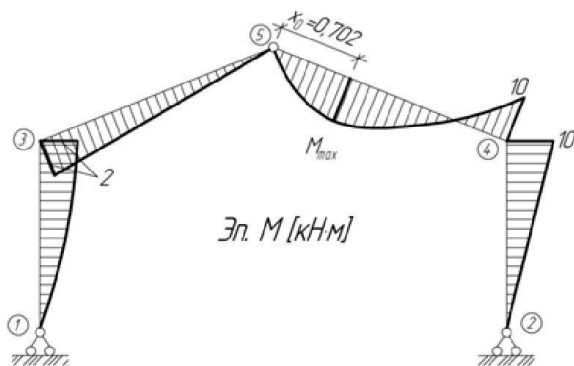


Рис. 5.22

M_{\max} определится после построения эпюры Q и вычисления x_0 по известной методике (см. пример 5.2).

5.4. Расчет составных рам

5.4.1. Основные понятия

Составные, статически определимые рамы представляют собой стержневые, геометрически неизменяемые системы, состоящие из нескольких трехшарнирных рам (рис. 5.23), или комбинацию из трехшарнирных рам, балочных рам и отдельных дисков (рис. 5.24–5.27).

Расчет составной рамы следует начинать с анализа ее структуры. Необходимо выяснить, из каких элементарных частей рама состоит, какие части системы являются главными, какие второстепенными, проверить статическую определимость и геометрическую неизменяемость.

При геометрическом анализе системы необходимо помнить о том, что под диском подразумевается явно геометрически неизменяемая система. Это может быть отдельный стержень или, например, явно геометрически неизменяемая система, состоящая из двух или трех дисков, надлежащим образом соединенных между собой стержнями. Например, система, состоящая из трех дисков, соединенных тремя шарнирами, не расположенными на одной прямой, будет геометрически неизменяемой и может быть принята за диск.

Рассмотрим образование некоторых составных систем.

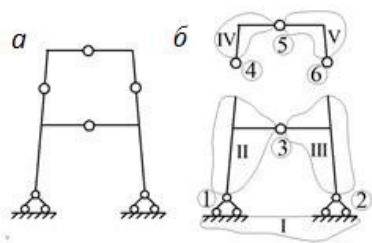


Рис.5.23

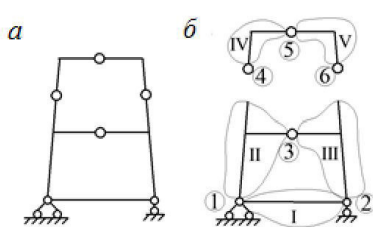


Рис.5.24

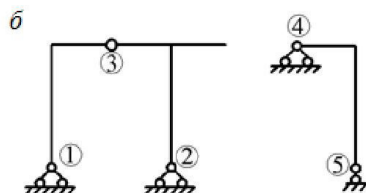
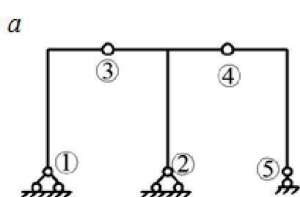


Рис. 5.25

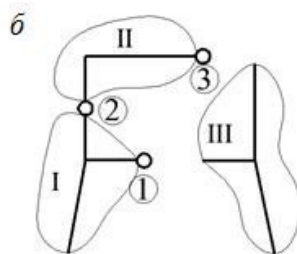
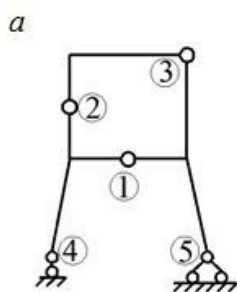


Рис. 5.26

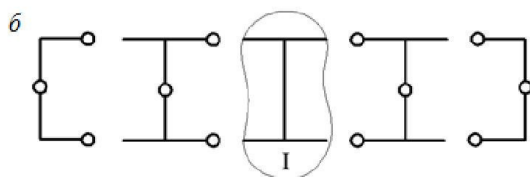
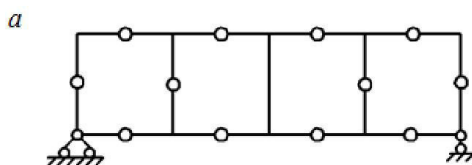


Рис. 5.27

Рама, изображенная на рис. 5.23, *а*, состоит из двух трехшарнирных рам: главной (1-2-3) и опирающейся на нее второстепенной (4-5-6) (рис. 5.23, *б*). Главная рама вместе с основанием представляет собой геометрически неизменяемую систему (три диска I, II, III соединены тремя шарнирами, не расположенными на одной прямой) или диск. Этот диск соединяется с дисками второстепенной части IV, V также тремя шарнирами (4-5-6), не расположенными на одной прямой. Таким образом, система будет геометрически неизменяемой.

Рама, изображенная на рис. 5.24, *а*, также состоит из двух трехшарнирных рам, но нижняя основная рама имеет затяжку 1–2. Внешне эта система балочная и крепится к основанию с помощью трех стержней, не параллельных и не пересекающихся в одной точке. Усилия в этих стержнях могут быть определены из условий равновесия всей системы в целом. Геометрический анализ выполняется аналогично рассмотренному для рамы (рис. 5.23).

Рама, изображенная на рис. 5.25, *а*, состоит из главной трехшарнирной рамы 1-2-3 (рис. 5.25, *б*), на консоль которой и основание опирается второстепенная балочная часть 4–5. Система неизменяема.

Система, изображенная на рис. 5.26, *а*, представляет собой геометрически неизменяемый замкнутый контур, состоящий из трех дисков I, II, III (рис. 5.26, *б*), соединенных тремя шарнирами 1, 2, 3, не расположенными на одной прямой. Этот контур, как диск, крепится к основанию тремя стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке, усилия в которых могут быть определены из условия равновесия. Система неизменяема. Особенностью этой системы является то, что в ней нет четко выраженных главных и второстепенных частей. Для расчета необходимо рассечь этот контур по шарнирам 1, 2, 3 и определить сначала усилия в трехшарнирной раме 1-2-3, состоящей из дисков I, II, а потом найти их в части 1-3-5 диска III.

На рис. 5.27, *а* изображена так называемая рама Вириндаля. Она состоит из основной части диска I (рис. 5.27, *б*), к которому последовательно крепятся слева и справа трехшарнирные рамы. Вся система геометрически не изменяема и присоединяется к основанию тремя стержнями.

Во всех рассмотренных случаях, как нетрудно убедиться, выполняется необходимое условие геометрической неизменяемости системы:

$$W = 3Д - 2Ш - С_0 = 0. \quad (5.1)$$

Это условие является и условием статической определимости системы. Здесь W – степень свободы, D – количество дисков, Π – количество простых шарниров, C_0 – количество опорных стержней.

После рассмотрения структуры системы, выполнения геометрического и статического анализа необходимо из условия равновесия определить силы взаимодействия между второстепенными и главными частями, а также опорные реакции для всей системы в целом. Силы взаимодействия являются опорными реакциями для вышележащих частей и нагрузкой для нижележащих. Определив силы взаимодействия и опорные реакции, следует вычислить эпюры M , Q , N и выполнить проверку расчета.

Пример 5.4

Требуется рассчитать составную раму, изображенную на рис. 5.28, если интенсивность распределенной нагрузки $q_1 = 20$ кН/м, $q_2 = 15$ кН/м, сосредоточенные силы $P_1 = P_2 = 15$ кН, момент $M = 30$ кНм. Размеры стержней заданы в метрах.

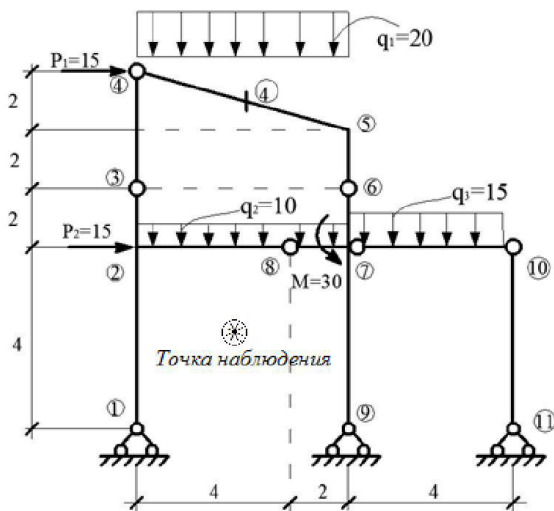


Рис. 5.28

Порядок расчета

1. Проверка геометрической неизменяемости и статической определимости системы.

Проверим выполнение условия (5.1). Для рассматриваемой рамы имеем:

$$W = 3Д - 2Ш - С_0 = 0, \text{ т. е. } W = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 6 = 0.$$

Условие (5.1) является необходимым, но недостаточным условием геометрической неизменяемости системы. Требуется выполнить структурный анализ заданной рамы. При выполнении этого анализа будем исходить из того, что система, состоящая из трех дисков, соединенных тремя шарнирами, не расположенными на одной прямой, будет геометрически неизменяемой.

Рама 1-2-3-6-8-9 (рис. 5.29) вместе с основанием состоит из трех дисков I, II, III, соединенных тремя шарнирами 1, 8, 9, и будет неизменяемой системой, т. е. диском. К этому диску с помощью шарниров 3, 4, 6, не расположенных на одной прямой, крепятся диски IV, V образующие также неизменяемую систему.

К этой системе в узле 7 и на опоре 11 с помощью шарнира 10 присоединяются два стержня 7-10 и 10-11, образуя геометрически неизменяемую трехшарнирную раму 7-10-11. В целом рама является геометрически неизменяемой системой.

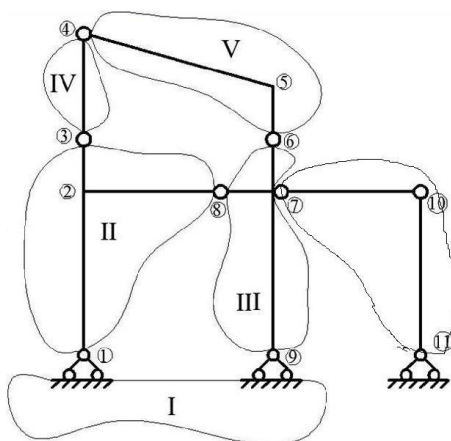


Рис. 5.29

2. Схема взаимодействия частей рамы.

Из рассмотрения рис. 5.29 следует, что главной частью будет трехшарнирная рама 1-8-9 с консолями 2-3, 7-6. На эту раму опирается второстепенная трехшарнирная рама 3-4-6, и на нее же опирается второстепенная трехшарнирная рама 7-10-11.

3. Определение опорных реакций (сил взаимодействия) для отдельных частей рамы.

Реакции определяем из условий равновесия, начиная с второстепенных рам.

Рама 3-4-5-6 (рис. 5.30):

рассматриваем эту второстепенную раму как трехшарнирную статически определимую. Расчет ведем как обычно, с определения опорных реакций, путем составления уравнений равновесия статики.

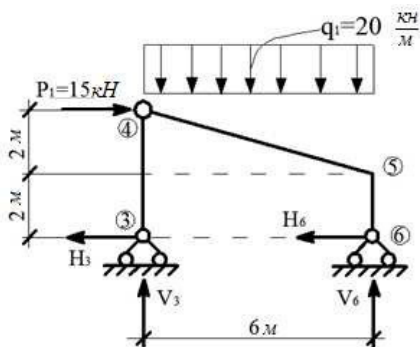


Рис. 5.30

В форме моментов относительно точек (3) и (6) для верхней рамы и относительно шарнира (4) для левой части рамы 3-4:

$$\sum M_3 = 0; \quad V_6 \cdot 6 - 15 \cdot 4 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

$$V_6 = 70 \text{ кН.}$$

$$\sum M_6 = 0; \quad -V_3 \cdot 6 - 15 \cdot 4 + 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

$$V_3 = 50 \text{ кН.}$$

$$\sum M_4(\text{слева}) = 0; \quad H_3 = 0.$$

$$\sum X = 0; \quad H_6 = 15 \text{ кН.}$$

Для проверки используем уравнение $\sum Y = 0$ или $70 + 50 - 20 \cdot 6 = 0$.

Рама 7-10-11 (рис. 5.31) также представляет собой трехшарнирную раму.

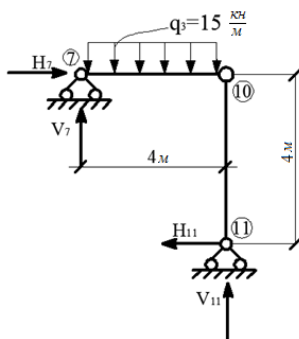


Рис. 5.31

$$\sum M_{10} (\text{справа}) = 0; \quad H_{11} = 0.$$

$$\sum X = 0; \quad H_7 = 0.$$

$$\sum M_7 = 0; \quad V_{11} \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_{11} = 30 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{11} = 0; \quad -V_7 \cdot 4 + 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_7 = 30 \text{ кН}.$$

Проверяем подстановкой в уравнение $\sum Y = 0$; $30 + 30 - 15 \cdot 4 = 0$.

Действие второстепенных рам на главную раму в точках 3, 6, 7 заменяем силами, равными опорным реакциям, но противоположного направления (рис. 5.32) и определяем опорные реакции в главной раме.

$$\sum M_1 = 0; \quad V_9 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 15 \cdot 4 + 30 - 30 \cdot 6 - 70 \cdot 6 - 15 \cdot 6 = 0, \quad \text{отсюда } V_9 = 150 \text{ кН}.$$

$$\sum M_9 = 0; \quad -V_1 \cdot 6 - 15 \cdot 4 + 50 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 3 + 30 - 15 \cdot 6 = 0, \quad \text{отсюда } V_1 = 60 \text{ кН}.$$

$$\sum M_8 (\text{слева}) = 0; \quad -H_1 \cdot 4 - 60 \cdot 4 + 50 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad \text{отсюда } H_1 = 10 \text{ кН}.$$

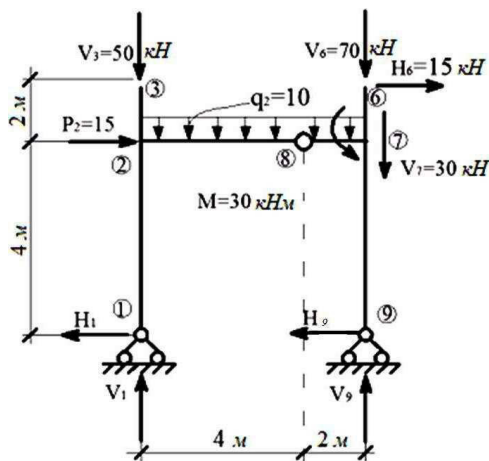


Рис. 5.32

Аналогично вычисляем $H_9 = 20 \text{ кН}$ из уравнения $\sum M_8 (\text{справа}) = 0$.

Выполняем проверку найденных реакций.

Уравнения равновесия тождественно удовлетворяются.

$$\sum Y = 0, \quad \sum X = 0.$$

4. Определение изгибающих моментов и построение эпюры M .

При построении эпюр величины изгибающих моментов будем откладывать со стороны растянутого волокна.

Изгибающие моменты в раме 3-4-6, в соответствии с рис. 5.33а, будут иметь следующие значения:

$$M_{56} = H_6 \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кНм.}$$

$$M_{43} = 0.$$

$$M_K = V_3 \cdot 3 + P_1 \cdot 1 - q_1 \cdot 3 \cdot 1,5 = 50 \cdot 3 + 15 \cdot 1 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 75 \text{ кНм.}$$

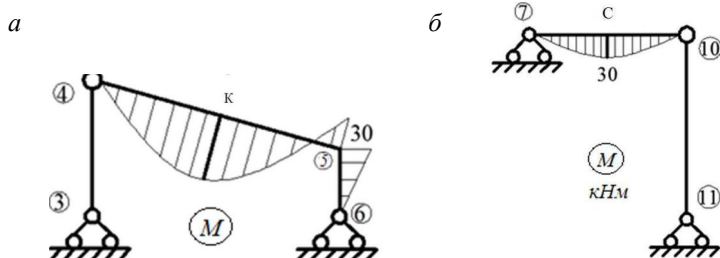


Рис. 5.33

Эпюра изгибающих моментов для этой рамы приведена на рис. 5.33а.

В раме 7-10-11, в соответствии с рис. 5.31, изгибающий момент в середине ригеля 7-10 будет, как в балке, на двух опорах:

$$M_c = \frac{q_3 l^2}{8} = \frac{15 \cdot 4^2}{8} = 30 \text{ кНм.}$$

Эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 5.33б.

Для главной рамы 1-3-8-6-9 (рис. 5.32) изгибающие моменты будут иметь следующие значения:

$$M_{28} = M_{21} = H_1 \cdot 4 = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кНм.}$$

$$M_{23} = 0.$$

$$M_{76} = H_6 \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кНм.}$$

$$M_{79} = H_9 \cdot 4 = -20 \cdot 4 = -80 \text{ кНм.}$$

Из условия равновесия узла 7 (рис. 5.34, б) имеем:

$$M_{78} = M_{76} + M_{79} - M = 30 + 80 - 30 = 80 \text{ кНм.}$$

Эпюра изгибающих моментов для главной части рамы приведена на рис. 5.34.

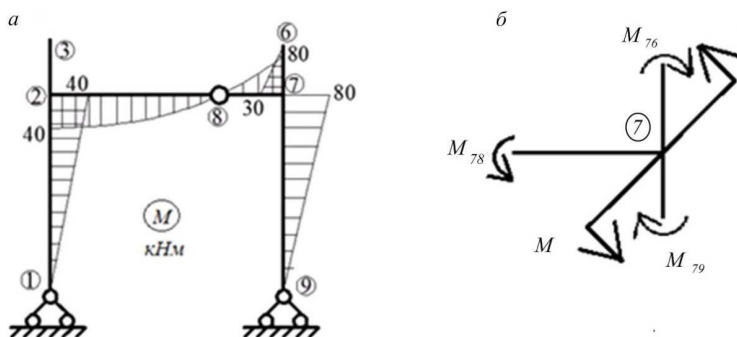


Рис. 5.34

Эпюра изгибающих моментов для всей рамы в целом показана ниже.

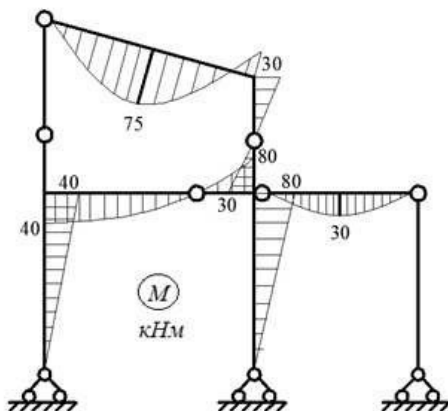


Рис. 5.35

5. Определение поперечных сил.

Для определения поперечных сил вырезаем каждый стержень рамы. Прикладываем к нему заданную нагрузку, если таковая имеется, и действующие по концам стержня известные из эпюры M моменты и неизвестные в соответствующих сечениях, а также поперечные силы, которые и определяем из условия равновесия этого стержня, рассматривая его как статически определимую шарнирно–опертую балку. Рассмотрим определение концевых поперечных сил для некоторых стержней.

Стержень 1-2 (рис. 5.36).

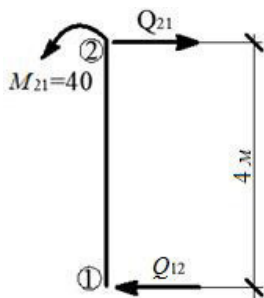


Рис. 5.36

Прикладываем к нему изгибающий момент M_{21} , взятый в сечении 2-1 из эпюры M (рис. 5.35). Направления определяем на основании эпюры M . Момент M_{21} вызывает растяжение правых волокон по отношению к наблюдателю. Из условия равновесия $\sum M_1 = 0$ и $\sum M_2 = 0$, находим поперечные силы:

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{40}{4} = 10 \text{ кН.}$$

Стержень 2-7 (рис. 5.37).

Рассматриваем стержень как единый на основании аксиомы затвердевания статики (курс теоретической механики). Из его равновесия находим поперечные силы Q_{27} и Q_{72} .

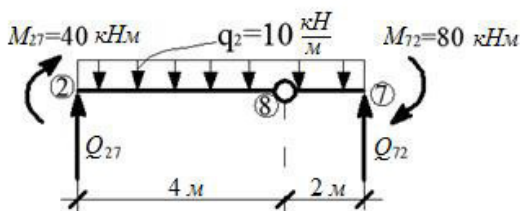


Рис. 5.37

$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0; \quad Q_{72} \cdot 6 - 40 - 80 - 10 \cdot 6 \cdot 3 &= 0. & Q_{72} &= 50 \text{ кН.} \\ \sum M_7 = 0; \quad Q_{27} \cdot 6 + 40 + 80 - 10 \cdot 6 \cdot 3 &= 0. & Q_{27} &= 10 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Стержень 4-5 (рис. 5.38).

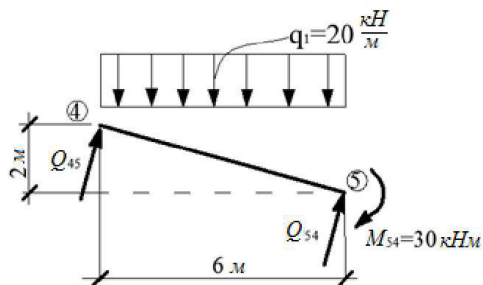


Рис. 5.38

$$\sum M_4 = 0; \quad Q_{54} \cdot l_{45} - 30 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

$$l_{45} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 6,32 \text{ м.}$$

$$Q_{54} = 61,7 \text{ кН.}$$

$$\sum M_5 = 0; \quad -Q_{45} \cdot 6,32 + 20 \cdot 6 \cdot 3 - 30 = 0.$$

$$Q_{45} = 52,2 \text{ кН.}$$

Аналогично определяются поперечные силы в остальных стержнях. Эпюра поперечных сил для рамы приведена на рис. 5.39.

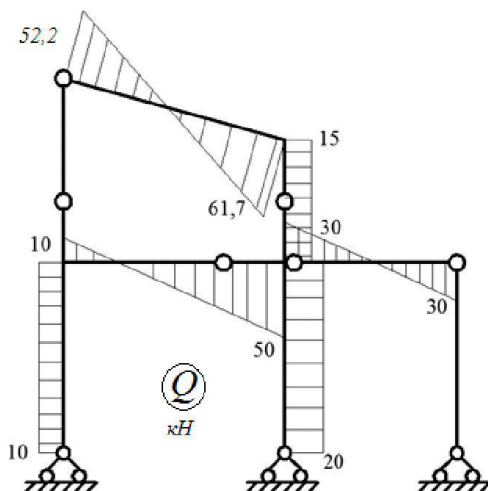


Рис. 5.39

6. Определение продольных сил.

Для вычисления продольных сил последовательно вырезаем из рамы внеопорные узлы сечениями, бесконечно близкими к узлам, в которых не более двух неизвестных продольных сил. Прикладываем по концам стержней,

сходящихся в узле, известные поперечные силы, взятые в соответствующих сечениях из эпюры поперечных сил « Q » (рис. 5.39), внешнюю сосредоточенную силу, действующую на узел (если она есть), неизвестные продольные усилия, которые и определяем из условий равновесия узла. Необходимо заметить, что направление продольных сил принимаем сами, а расчет покажет: если значение получилось с минусом, то действительная продольная сила направлена в другую сторону, чем принято ранее. Найдем, например, продольные силы в стержнях 4-5 и 5-6 из рассмотрения условий равновесия узлов 4 и 5 (рис. 5.40 и 5.41 соответственно).

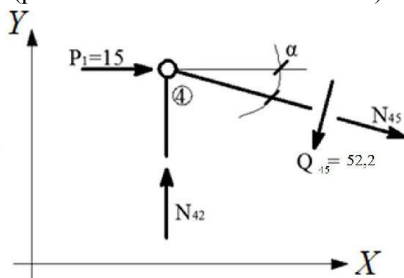


Рис. 5.40

$$\sum X = 0; N_{45} \cdot \cos \alpha + 15 - 52,2 \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$N_{45} = 1,58 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; N_{42} - 52,2 \cdot \cos \alpha - 1,58 \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$N_{42} = 50 \text{ кН.}$$

$$\text{Здесь } \sin \alpha = \frac{2}{6,32} = 0,316, \quad \cos \alpha = \frac{6}{6,32} = 0,949.$$

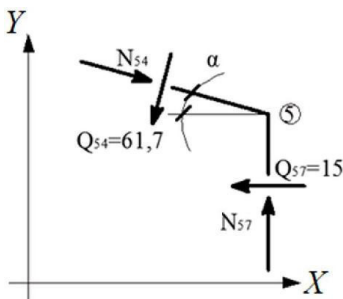


Рис. 5.41

$$\sum X = 0; N_{54} \cdot \cos \alpha - 15 - 61,7 \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$N_{54} = 36,3 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; N_{57} - 61,7 \cdot \cos \alpha - 36,3 \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$N_{57} = 70 \text{ кН.}$$

Аналогично определяем из условий равновесия узлов 2, 7, 10 остальные продольные силы. Эпюра продольных для рамы приведена на рис. 5.42. Необходимо обратить внимание, что продольная сила на наклонном ригеле 4-5 изменяется по линейному закону, что связано с действием равномерно распределенной нагрузки q . Если $q = 0$, то продольная сила на этом участке имеет постоянное значение.

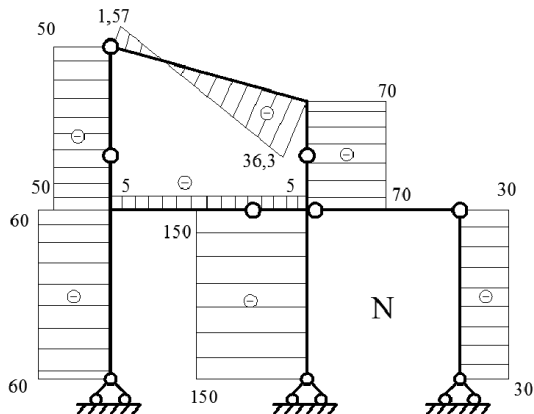


Рис. 5.42

7. Проверка правильности расчета.

Любая отсеченная часть рамы под действием всех внешних сил и внутренних усилий, приложенных в местах разреза, должна находиться в равновесии, т. е. должны соблюдаться уравнения равновесия статики:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Для проверки правильности найденных усилий проведем сквозное сечение через середины стоек 1-2, 7-9, 10-11 и рассмотрим равновесие верхней отсеченной части рамы (рис. 5.43).

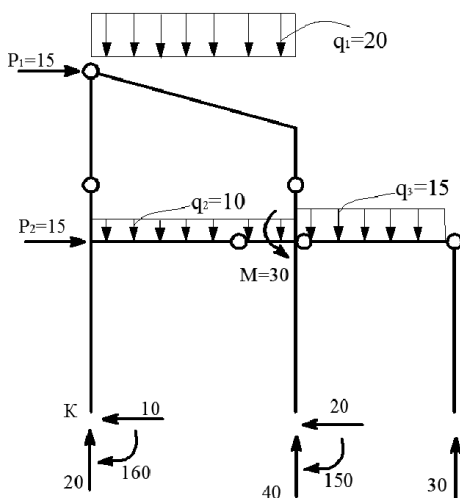


Рис. 5.43

Уравнения равновесия для показанной части рамы имеют вид:

$$\sum X = 0; 15 + 15 - 10 - 20 = 0.$$

$$\sum Y = 0; 60 + 150 + 30 - 20 \cdot 6 - 10 \cdot 6 - 15 \cdot 4 = 0.$$

$$240 - 240 = 0.$$

$$\sum M_K = 0; -20 - 15 \cdot 2 - 15 \cdot 8 - 20 \cdot 6 \cdot 3 - 10 \cdot 6 \cdot 3 + 30 + 150 \cdot 6 - 40 - 15 \cdot 4 \cdot 8 + 30 \cdot 10 = 0.$$

Уравнения равновесия статики удовлетворяются, что дает основание считать, что расчет выполнен правильно.

5.5. Приемы разбиения сложных рам на составляющие

Рассмотрим рамы, в которых можно выделить главную и второстепенную части. Главная часть может существовать самостоятельно, если удалить второстепенную, – это аналогично составным балкам.

Такие рамы приведены на рис. 5.44, 5.46.

1. Расчет начинается со второстепенной рамы 3-6-4. На данном этапе второстепенная рама рассматривается как самостоятельная. Реакции опор V_3 , V_4 , H_3 , H_4 (рис. 5.45, а) могут быть определены, как обычно, из условий равновесия статики.

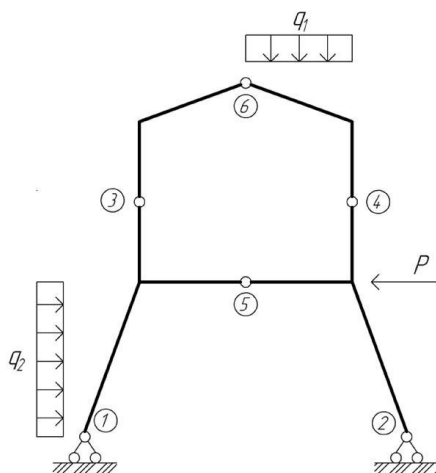


Рис. 5.44

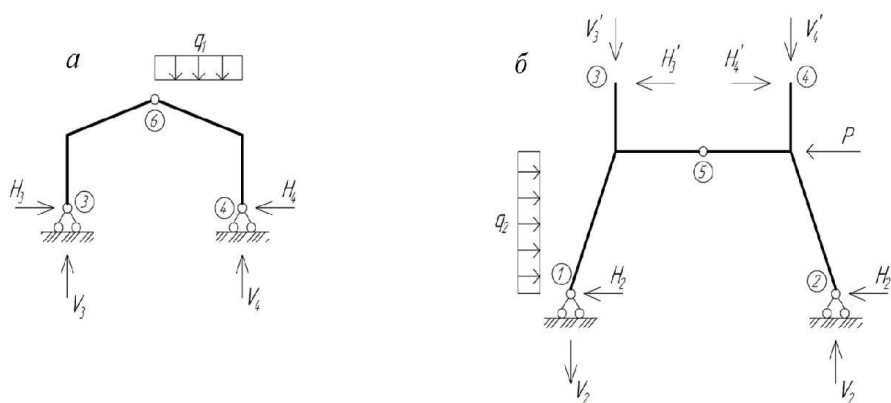


Рис. 5.45

2. Далее рассматривается равновесие главной рамы 1-3-4-5-2 (рис. 5.45, б) под действием собственной нагрузки и реакций опор второстепенной рамы V_3' , V_4' , H_3' , H_4' , переданных с верхнего этажа на нижний, с противоположными знаками, в соответствии с третьим законом Ньютона.

Пример 5.5

Для заданной рамы наметить ход расчета.

В данной раме (рис. 5.46) также можно выделить главную раму 1-2-3-4-5-6 и второстепенную раму 6-7-8.

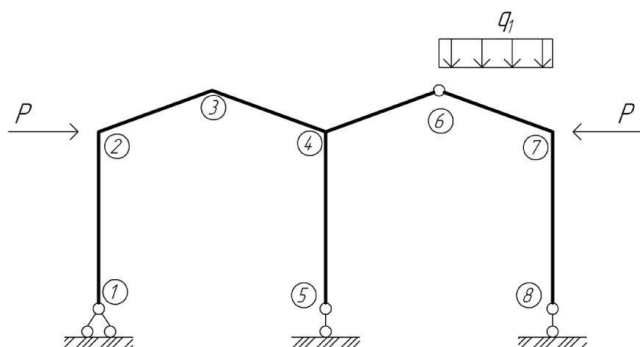


Рис. 5.46

На первом этапе рассчитывается второстепенная рама 6-7-8, которая представляет собой раму на двух опорах, и для нее определяются реакции опор V_8 , H_8 и V_6 (рис. 5.47, а).

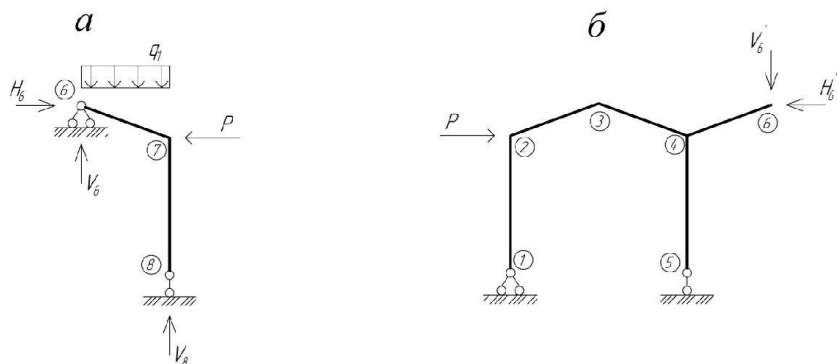


Рис. 5.47

Реакции опоры V'_6 и H'_6 в точке контакта передаются на главную раму с обратными знаками. Главная рама тоже представляет собой раму на двух опорах с консолью 4-6 (рис. 5.47, б), расчет которой известен из курса «Сопротивление материалов» [14].

Пример 5.6

Для заданной рамы (рис. 5.48) построить эпюры внутренних усилий.

Решение

В этом примере (рис. 5.48) рассматривается рама, в которой невозможно выделить главную и второстепенную части. Рассмотрим порядок расчета таких рам.

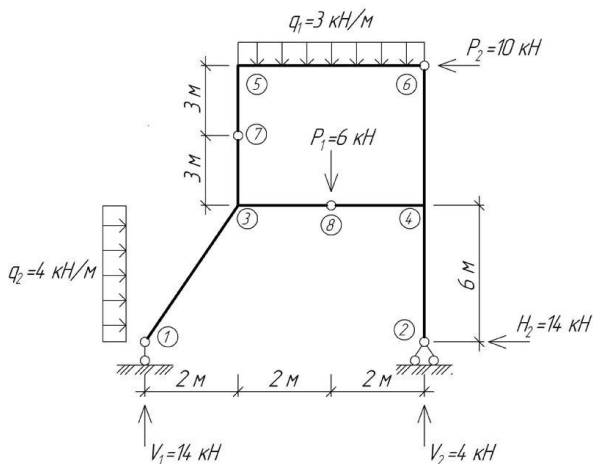


Рис. 5.48

1. Кинематический и структурный анализ конструкции. Система состоит из трех дисков (рис. 5.49). Диски соединены тремя шарнирами 6, 7, 8, не лежащими на одной прямой, и правильно прикреплены к земле опорами 1 и 2 (рис. 5.48).

Степень статической неопределимости n может определяться из формулы Чебышева: $n = -W = -(3Д - 2Ш - С)$.

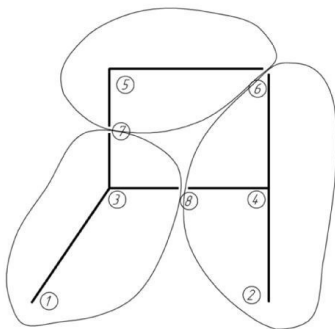


Рис. 5.49

Для заданной рамы $n = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3) = 0$. Для определения статической неопределимости можно воспользоваться и другой формулой: $n = 3К - Ш$, где $К$ – количество замкнутых контуров рамы, $Ш$ – количество простых (одиночных) шарниров.

В нашем случае $К = 2$; $Ш = 6$; $n = 3 \cdot 2 - 6 = 0$.

Следует иметь в виду, что в замкнутом контуре шарнирно–подвижная опора эквивалентна двум одиночным шарнирам, т.е. $\text{Ш} = 2$.

2. Определение реакций опор из равновесия системы в целом (рис. 5.48).

$$\sum X = 0.$$

$$4 \cdot 6 - 10 - H_2 = 0; \quad H_2 = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum M_2 = 0.$$

$$-V_1 \cdot 6 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 + P_1 \cdot 2 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 + P_2 \cdot 12 = 0; \quad V_1 = 14 \text{ кН.}$$

$$\sum M_1 = 0.$$

$$V_2 \cdot 6 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 - q_1 \cdot 4 \cdot 4 - P_1 \cdot 4 + P_2 \cdot 12 = 0; \quad V_2 = 4 \text{ кН.}$$

Проверка правильности вертикальных реакций. Должно быть $\sum Y = 0$:

$$V_1 + V_2 - 3 \cdot 4 - 6 = 14 + 4 - 18 = 18 - 18 = 0.$$

Это значит, что реакции найдены верно.

1. Расчет трехшарнирной рамы 8-3-7-5-6 с консолью 1-3.

Из системы выделяем трехшарнирную раму 8-3-7-5-6 (можно другой вариант) и рассчитываем на данном этапе как самостоятельную раму на опорах 6 и 8, причем опоры на разных уровнях (рис. 5.50) и принимаются за неподвижные.

При определении реакций опор в трехшарнирных рамах с опорами на разных уровнях приходится решать систему уравнений. Перечеркнутые реакции опор H_6 и V_8 – это предварительные направления искомых реакций, которые вошли в уравнения равновесия, но из решения уравнений получились со знаком «минус».

Из рассмотрения равновесия рамы в целом (рис. 5.50) имеем:

$$\sum M_8 = 0. \quad H_6 \cdot 6 + V_6 \cdot 2 - V_1 \cdot 4 + q_2 \cdot 6 \cdot 3 = 0,$$

откуда $3 \cdot H_6 + V_6 = -8.$

$$\sum M_7^{\text{верхних сил}} = 0. \quad V_6 \cdot 4 + H_6 \cdot 3 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 = 0,$$

откуда $4 \cdot V_6 + 3 \cdot H_6 = 24.$

Получим систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} V_6 + 3 \cdot H_6 &= -8 \\ 4 \cdot V_6 + 3 \cdot H_6 &= 24 \end{aligned} \right\}$$

Из решения системы уравнений определяем реакции:

$$H_6 = -6,222 \text{ кН}, \quad V_6 = 10,666 \text{ кН}.$$

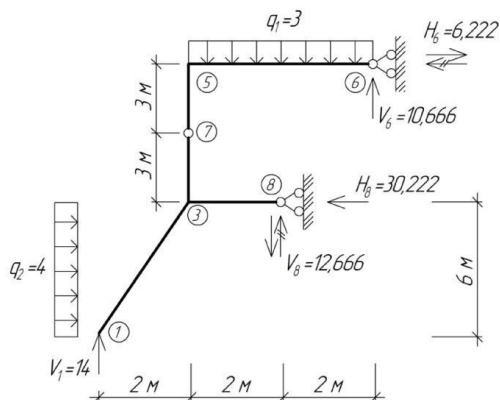


Рис. 5.50

Знак минус свидетельствует, что направление реакции H_6 , принятое предварительно, необходимо сменить на противоположное в дальнейших расчетах.

Аналогично определяем H_8 и V_8 .

Равновесие рамы в целом:

$$\sum M_6 = 0, \quad -H_8 \cdot 6 - V_8 \cdot 2 - V_1 \cdot 6 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 + q_2 \cdot 6 \cdot 9 = 0,$$

откуда получаем уравнение:

$$3 \cdot H_8 + V_8 = 78.$$

Уравнение равновесия для нижней части рамы имеет вид:

$$\sum M_7^{\text{нижних сил}} = 0, \quad -V_1 \cdot 2 - H_8 \cdot 3 + q_2 \cdot 6 \cdot 6 + V_8 \cdot 2 = 0,$$

откуда $-3 \cdot H_8 + 2 \cdot V_8 = -116$.

Решая систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} V_8 + 3 \cdot H_8 &= 78 \\ -3 \cdot H_8 + 2 \cdot V_8 &= -116 \end{aligned} \right\},$$

имеем $V_8 = -12,666$ кН, $H_8 = 30,222$ кН.

Проверяем равновесие рамы. Для этого составим уравнения в форме:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

$$\sum X = q_2 \cdot 6 + H_6 - H_8 = 4 \cdot 6 + 6,222 - 30,222 = 0.$$

$$\sum Y = V_1 - q_1 \cdot 4 - V_8 + V_6 = 14 - 3 \cdot 4 - 12,666 + 10,666 = -24,666 + 24,666 = 0.$$

Условие равновесия выполняется, значит, реакции определены верно.

Для выделенной трехшарнирной рамы можно построить эпюру M (рис. 5.51, а).

а

б

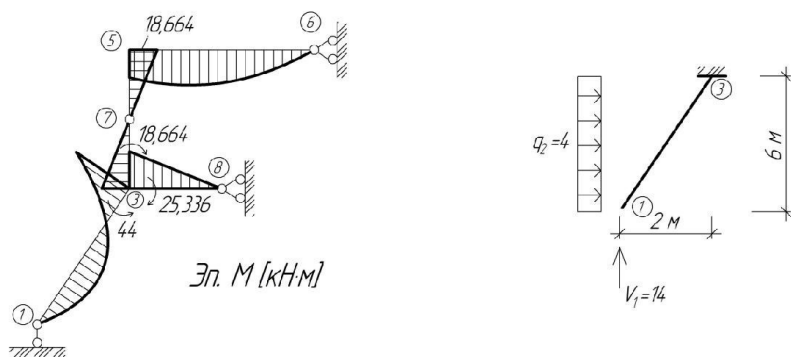


Рис. 5.51

При вычислении M_{31} (рис. 5.51, б) учитываем $V_1 = 14$ кН и $q_2 = 4$ кН/м.

$$M_{31} = V_1 \cdot 2 - q_2 \cdot 6 \cdot 3 = -44 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (растянутая зона слева),}$$

$M_{56} = V_6 \cdot 4 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 = 18,664 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (растянутая зона снизу, знаки моментов можно принять, как в балке).

В трехстержневом узле 3 момент M_{38} можно определить из равновесия узла 3 (рис. 5.52, а): $M_{38} = 44 - 18,664 = 25,336 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

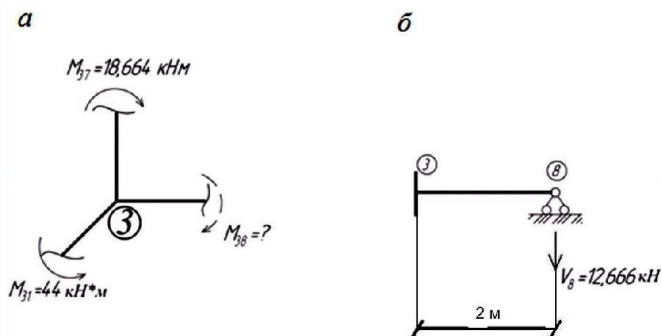


Рис. 5.52

Этот же момент M_{38} можно определить вторым способом, из рассмотрения равновесия стержня 3-8 (рис 5.52, б).

$$M_{38} = -V_8 \cdot 2 = -12,666 \cdot 2 = -25,332 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Проверка равновесия диска 2-4-6-8 и построение эпюры M для этой части (рис. 5.53, а, б). Необходимо иметь в виду, что здесь учтено действительное направление реакции опор, которое передано с обратным знаком на основании закона Ньютона.

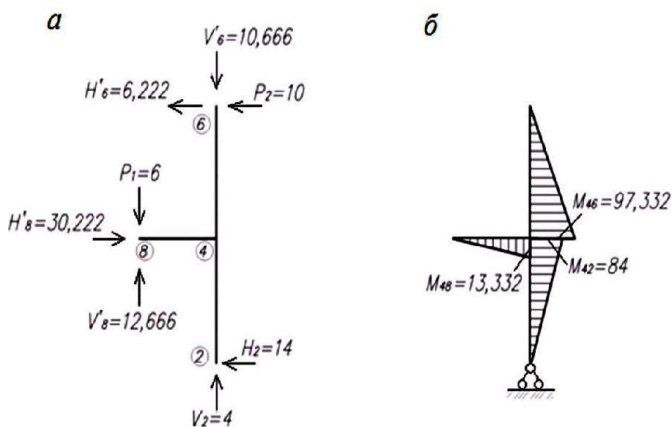


Рис. 5.53

Примечание: значение сил и моментов, соответственно в кН и кНм.

$$\sum X = 30,222 - 14 - 6,222 - 10 = 30,222 - 30,222 = 0.$$

$$\sum Y = 4 + 12,666 - 10,666 - 6 = 16,666 - 16,666 = 0.$$

Далее строим эпюру M по найденным значениям (рис. 5.53, б):

$$M_{48} = (12,666 - 6) \cdot 2 = 13,332 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_{42} = H_2 \cdot 6 = 84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_{46} = (P_2 + H'_6) \cdot 3 = 97,332 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Узел 4 находится в равновесии

Эпюра M для всей рамы приведена на рис. 5.54.

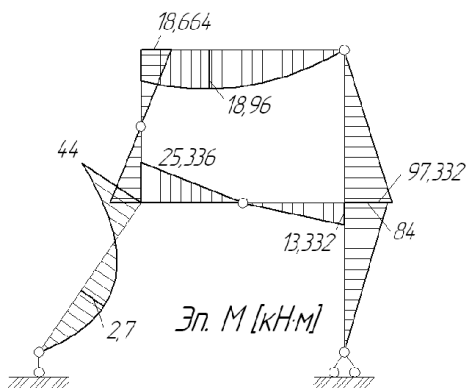


Рис. 5.54

Необходимо обратить внимание, что на горизонтальном ригеле 3-8-4 эпюра моментов имеет излом, что связано с действием нагрузки P_1 .

4. Построение эпюры Q по эпюре M .

В этом примере для построения эпюры Q использован другой метод, чем в предыдущих примерах, – метод вырезания стержней.

В соответствии с этим методом каждый стержень считается балкой, статически определимой, на двух опорах, загруженной заданной нагрузкой и концевыми моментами. Концевые моменты являются внешними по отношению к вырезанным стержням, поэтому их стрелки направлены в противоположную сторону, чем при рассмотрении равновесия узла (рис. 5.52, *a*). Рассматриваются равновесие стержней (рис. 5.55), и из них находят опорные реакции (поперечные силы).

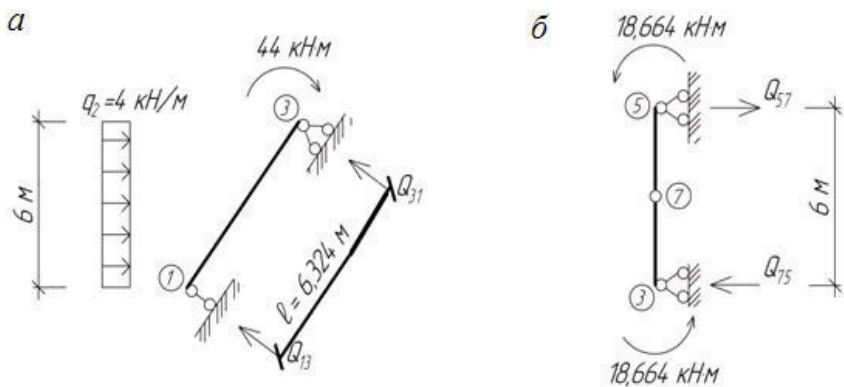


Рис. 5.55

Стержень 1-3 (рис. 5.55, *a*)

$$\sum M_3 = 0. \quad -Q_{13} \cdot 6,32 - 44 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

$$Q_{13} = 4,43 \text{ кН.}$$

$$\sum M_1 = 0. \quad Q_{31} \cdot 6,324 - 44 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

$$Q_{31} = 18,35 \text{ кН.}$$

Стержень 3-5 (рис. 5.55, *б*)

$$Q_{35} = \frac{18,664 + 18,664}{6} = 6,222 \text{ кН (рис. 5.55, б).}$$

Аналогичные вычисления проделаны и для других стержней. Эпюра Q представлена на рис. 5.56.

При определении знаков на эпюре Q можно пользоваться следующим правилом знаков на основе дифференциальных зависимостей между Q и M : если на данном участке эпюры M нисходит слева направо, то Q положительна, а если восходит, то Q отрицательна. Это правило удобно на прямолинейных участках эпюры M . Например, на стержне 3-4 оба участка эпюры M нисходят слева направо, и Q положительна. Правило применимо и для стоек, но для этого необходимо представить их горизонтальными стержнями или повернуться к ним лицом из точки наблюдения. При криволинейной же эпюре M иногда требуется коррекция характера эпюры M после выявления экстремума посредством эпюры Q .

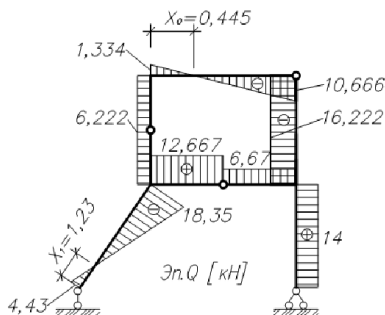


Рис. 5.56

При $x_0 = 0,445$ м и $x_1 = 1,23$ м на эпюре M в этих сечениях имеются экстремумы. Координаты этих сечений и соответствующие им моменты определены по методике, использованной в предыдущих примерах. В этих сечениях эпюры поперечных сил равны нулю.

5. Построение эпюры продольных сил N по эпюре Q методом вырезания узлов.

Продольные силы проще всего определять из равновесия вырезанных узлов из рамы, предварительно приложив к ним поперечные силы, взятые в соответствующих сечениях из эпюры Q . При этом если в узле действует внешняя нагрузка, то ее тоже надо приложить к узлу.

Равновесие узла 6

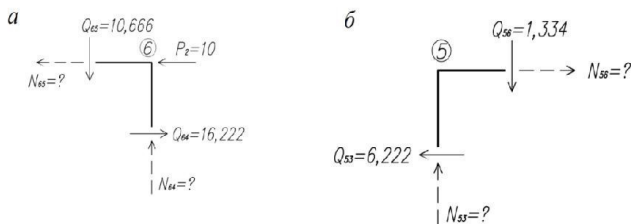


Рис. 5.57

Из уравнений равновесия находим продольные силы в стойке 6-4 и в ригеле 6-5:

$$\sum X = 0; \quad N_{65} = 16,222 - 10 = 6,222 \text{ кН}$$

(растяжение, т. к. N_{65} направлена от узла).

$$\sum Y = 0; \quad N_{64} = 10,666 \text{ кН}$$

(сжатие, т. к. N_{64} направлена к узлу).

Аналогичные расчеты производим для узла 5.

Равновесие узла 5

$$\sum X = 0; \quad N_{56} = 6,222 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{53} = 1,334 \text{ кН.}$$

При этом должно выполняться равенство $N_{56} = N_{65}$.

Равновесие узла 3 (рис. 5.58, а)

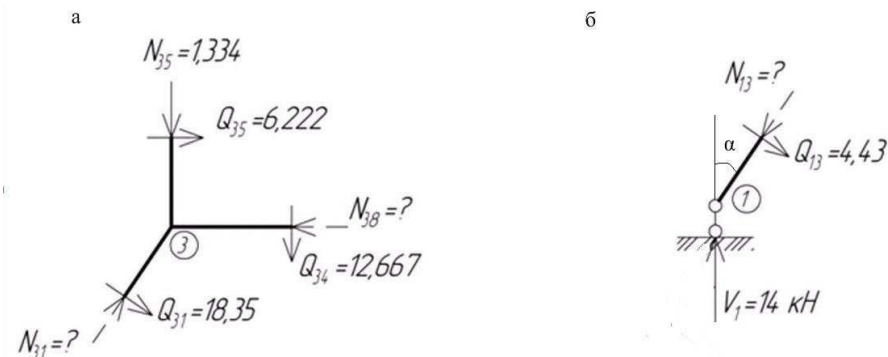


Рис. 5.58

$$\sum Y = 0; \quad N_{31} \cdot \cos \alpha - 1,334 - 12,667 - 18,35 \cdot \sin \alpha = 0,$$

откуда $N_{31} = 20,887 \text{ кН.}$

$$\sum X = 0; \quad -N_{38} + 18,35 \cdot \cos \alpha + 20,887 \cdot \sin \alpha + 6,222 = 0,$$

откуда $N_{38} = 17,396 + 6,6 + 6,222 = 30,218 \text{ кН.}$

Продольная сила N_{13} определена из равновесия узла 1 (рис. 5.58, б).

Необходимо обратить внимание, что при рассмотрении узла 3 следует приложить к узлу уже известную силу $N_{35} = N_{53} = 1,334 \text{ кН.}$

Эпюра N для рамы в целом приведена на рис. 5.59.

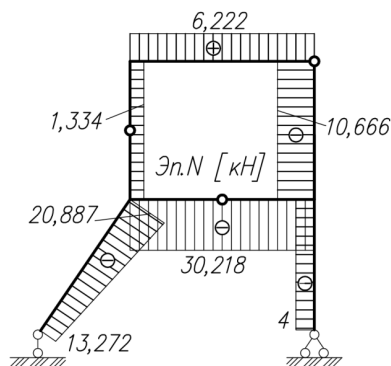


Рис. 5.59

6. Проверка правильности расчета.

Любая отсеченная часть рамы под действием внешних сил и внутренних усилий, приложенных в местах разреза, должна находиться в равновесии, т. е. должны соблюдаться уравнения равновесия:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0.$$

Проведем сквозное сечение через нижние стойки и рассмотрим равновесие верхней части (рис. 5.60). Сечения расположены бесконечно близко к узлам 3 и 4.

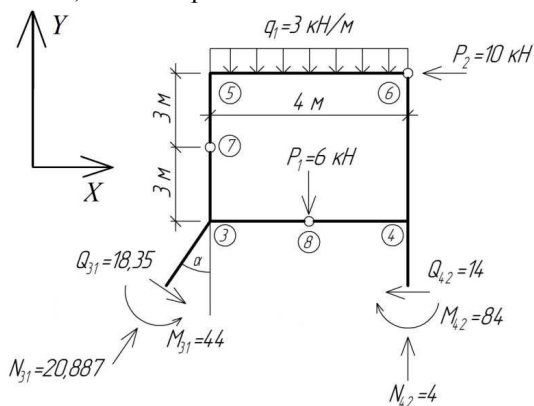


Рис. 5.60

Геометрические функции определяем из геометрии.

$$\cos \alpha = \frac{6}{6,324} = 0,948. \quad \sin \alpha = \frac{2}{6,324} = 0,316.$$

Уравнение равновесия статики имеет вид:

$$\sum X = 20,887 \cdot 0,316 + 18,35 \cdot 0,948 - 14 - 10 = 6,6 + 17,4 - 24 = 0.$$

$$\sum Y = 20,887 \cdot 0,948 - 18,35 \cdot 0,316 + 4 - 6 - 3 \cdot 4 = 19,8 - 5,8 + 4 - 18 = 0.$$

$$\sum M_3 = 44 - 84 + N_{42} \cdot 4 - P_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 + P_2 \cdot 6 = -40 + 4 \cdot 4 - 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 6 = 0.$$

Уравнение равновесия выполняется. Таким образом, расчет произведен верно.

Пример 5.7

Для заданной рамы построить эпюру изгибающих моментов M .

Рама на рис. 5.61 развита в горизонтальном направлении, в ней также невозможно выделить главные части.

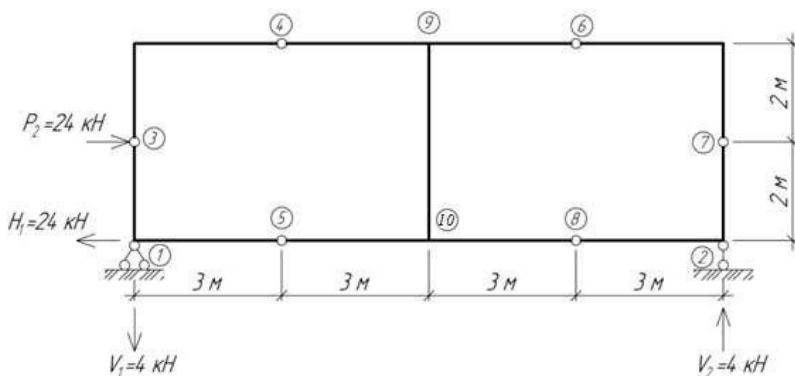


Рис. 5.61

Решение

1. Кинематический анализ.

Две трехшарнирные рамы 4-3-5 и 8-7-6 присоединены к центральному диску 4-6-5-8 и правильно присоединены к земле опорами 1 и 2. Степень статической неопределимости $n = 3 \cdot K - \text{III} = 3 \cdot 2 - 6 = 0$. Рама статически определима и геометрически неизменяема. В таких рамах предварительно надо определить опорные реакции.

2. Определение реакций опор из равновесия рамы в целом.

$$\sum X = 0; P - H_1 = 0; H_1 = P = 24 \text{ кН.}$$

$$\sum M_2 = 0; V_1 \cdot 12 - P \cdot 2 = 0; V_1 = 4 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; V_1 - V_2 = 0; V_2 = 4 \text{ кН.}$$

3. После определения реакций производим структурный анализ. Выделяем две трехшарнирные рамы 5-1-3-4. Обе части являются

второстепенными (рис. 5.62, а, б). Расчет второстепенных рам производится как трехшарнирных рам. Рассчитав второстепенные рамы, переходим к расчету главной части 4-5-9-10-6-8. При расчете этой части нагружаем ее найденными реакциями $H_5, V_{5v}, H_4, V_4, H_6, V_6, H_8, V_8$, но с обратным их направлением. Если к этой части приложена внешняя нагрузка, то ее тоже необходимо учесть.

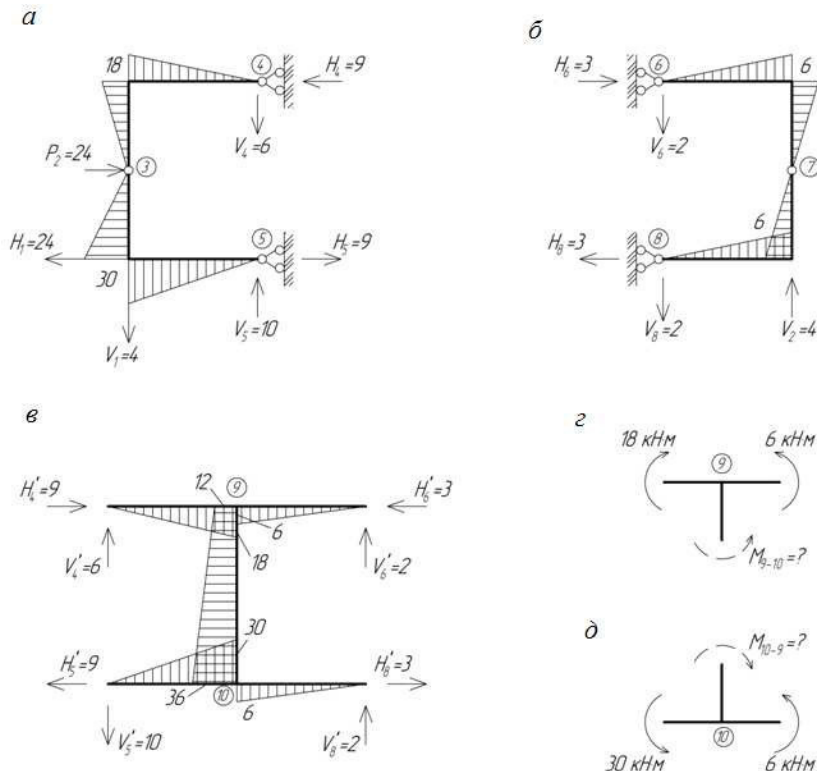


Рис. 5.62

Изгибающие моменты в сечениях M_{9-10} и M_{10-9} проще определить из равновесия узлов 9 и 10 (рис. 5.62, г, д):

$$M_{9-10} = 18 - 6 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 5.62, г);}$$

$$M_{10-9} = 30 + 6 = 36 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 5.62, д).}$$

Изгибающие моменты в стержнях M_{9-4}, M_{10-5} и M_{9-6}, M_{10-8} находятся, как в консолях.

Проверка расчета

Если расчет рам сделан верно, то центральный диск должен быть в равновесии (рис. 5.62, в):

$$\sum X = 9 - 9 - 3 + 3 = 0.$$

$$\sum Y = 6 - 10 + 2 + 2 = 0.$$

Эпюра M для рамы в целом приведена на рис. 5.63.

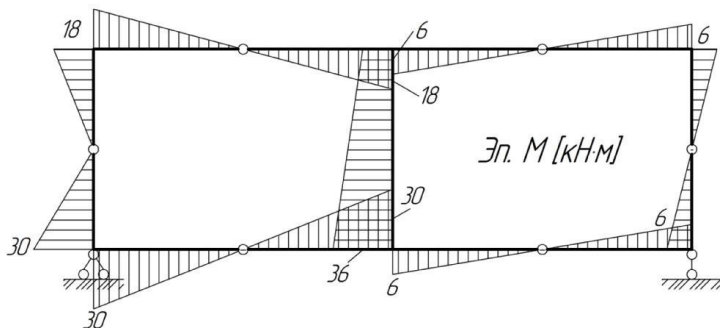


Рис. 5.63

Пример 5.8

Для заданной рамы (рис. 5.64) построить эпюру изгибающих моментов M .

Рама нагружена силой $P = 12$ кН, приложенной в шарнире 4 ригеля 6-8, геометрические размеры рамы показаны на рисунке.

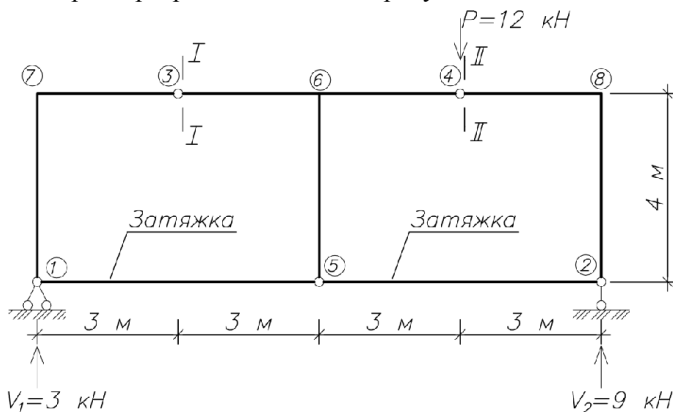


Рис. 5.64

Решение

Для рамы, приведенной на рис. 5.64, при наличии затяжек (это стержни 1-5 и 2-4, расположенные между двумя шарнирами) расчет можно упростить и не разбивать раму на трехшарнирные составляющие рамы. Для этого используем

положение о том, что в ненагруженных затяжках 1-5 и 2-5 возникают только продольные силы N .

По формуле Чебышева, $W = 3Д - 2Ш - С_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$ или $n = -W$.

Рама статически определима, и выполняется необходимый признак геометрической неизменяемости. Структурный анализ показывает, что эта рама также геометрически неизменяема. Две трехшарнирные рамы 5-1-7-3 и 5-2-8-4 подсоединяются к диску 3-5-6-4 тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой.

Определение реакций опор из равновесия рамы в целом.

$$\sum X = 0; H_1 = 0.$$

$$\sum M_2 = 0; -V_1 \cdot 12 + P \cdot 3 = 0; V_1 = 3 \text{ кН}.$$

$$\sum M_1 = 0; V_2 \cdot 12 - P \cdot 9 = 0; V_2 = 9 \text{ кН}.$$

Равновесие левой части рамы (рис. 5.64) (сечение I-I) и правой части рамы (сечение II-II) показаны на рис. 5.65, а, б.

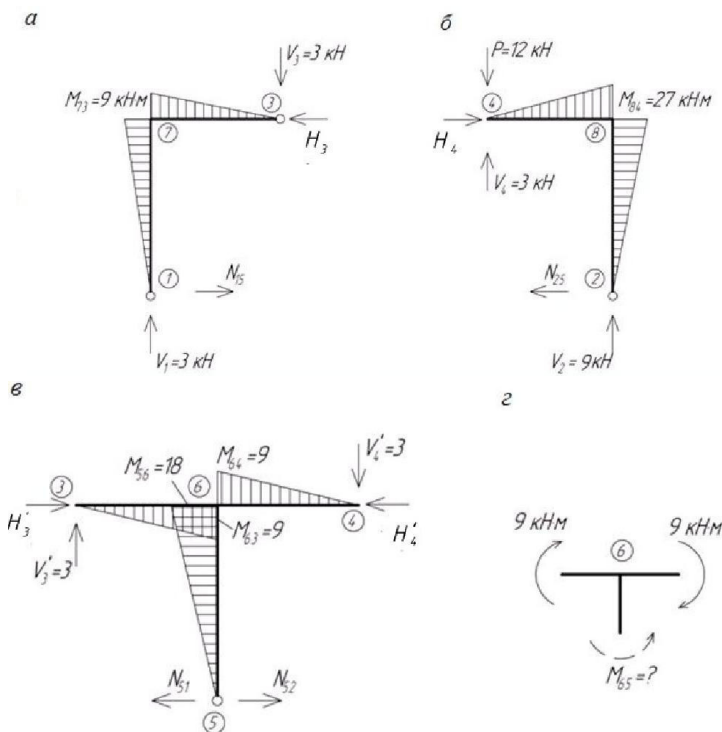


Рис. 5.65

Из равновесия левой части (рис. 5.65, а) с использованием уравнения равновесия определяется V_3 :

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0; \\ -V_3 + V_1 &= 0. \\ V_3 &= V_1 = 3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Из равновесия правой части (рис. 5.65, б) определяется V_4 .

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0. \\ -P + V_4 + V_2 &= 0. \\ V_4 &= 3 \text{ кН}.\end{aligned}$$

После определения V_3 можно построить эпюры M для левой части рамы 1-7-3, вычислив моменты в характерных сечениях.

Например: $M_{73} = V_3 \cdot 3 = -3 \cdot 3 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Аналогично (рис. 5.65, б) определяем $M_{84} = (P - V_4) \cdot 3 = 27 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Момент $M_{63} = V'_3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ определен из равновесия стержня 3-6 (рис. 5.65, в), а момент $M_{64} = V'_4 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ из рассмотрения ригеля 4-6 (рис. 5.65, в).

Момент M_{65} определен из равновесия узла 6 (рис. 5.65, г):

$$M_{65} = 9 + 9 = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M приведена на рис. 5.66. Изгибающие моменты в стержнях построены со стороны растянутых волокон.

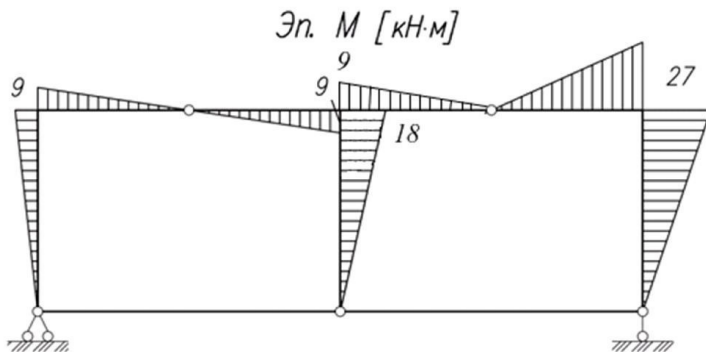


Рис. 5.66

6. РАСЧЕТ АРОК

6.1. Основные сведения

Арка – конструкция, имеющая криволинейное очертание оси несущей части или частей. Арки применялись с давних пор, например, при строительстве мостов, а также сводов в зданиях. В настоящее время они используются в качестве элементов ангаров, спортивных залов, велотреков и др.

В отличие от балок арки позволяют перекрывать большие пролеты с меньшими затратами и большей нагрузочной способностью. Конструкции арок многообразны и отличаются:

- * криволинейным очертанием, которое может быть круговым, параболическим, эллиптическим или описываться более сложным законом;
- * устройством опор (заделка, неподвижная шарнирная опора);
- * расположением опор по отношению друг к другу, без смещения или со смещением;
- * наличием затяжки и ее расположением;
- * наличием ключа (замка).

Рассмотрим некоторые типы арок:

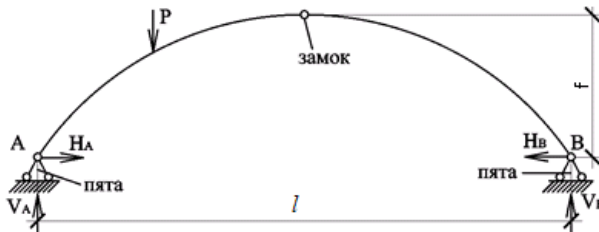


Рис. 6.1

1. Трехшарнирная арка (рис. 6.1). Такая арка состоит из двух дисков (криволинейных стержней), опирающихся на фундамент с помощью неподвижных шарнирных опор. Основные размеры арки – пролет l и стрела подъема f . Арка является распорной системой с выпуклостью, направленной навстречу нагрузке. В опорах возникают две реакции: вертикальная V и распор H . Кинематический анализ арки аналогичен анализу трехшарнирной рамы. Арка (рис. 6.1) является геометрически неизменяемой конструкцией.

2. Арка с затяжкой на уровне опор (рис. 6.2), затяжка воспринимает распор и разгружает фундамент. Затяжка может располагаться и выше опор (рис. 6.3).

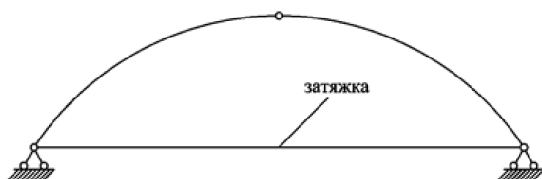


Рис. 6.2

3. Арка с затяжкой повышенного типа (рис. 6.3), шарниры затяжки – примыкающие.

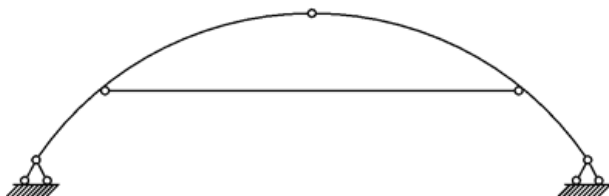


Рис. 6.3

4. Арка с надарочными строениями (рис. 6.4).

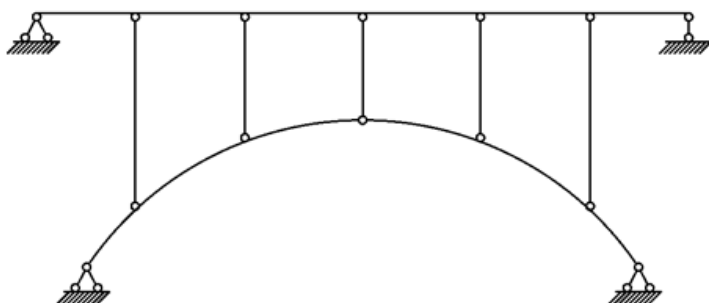


Рис. 6.4

6.2. Геометрические характеристики арок

1. Арка очерчена по параболе.

Уравнение параболы:

$$y = \frac{4f}{l^2} \cdot x \cdot (l - x). \quad (6.1)$$

В произвольной точке K (рис. 6.5) на расстоянии x координата y определяется из уравнения параболы (6.1), а $\operatorname{tg} \varphi$ можно определить по формуле.

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - 2x). \quad (6.2)$$

По тангенсу определяются $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, которые необходимы при вычислении внутренних усилий в сечениях арки.

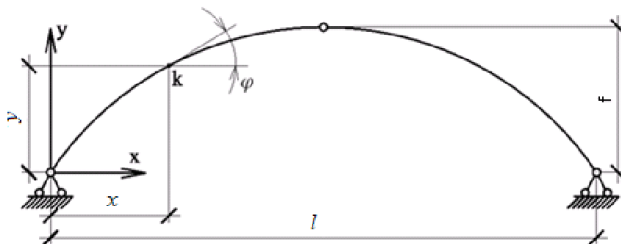


Рис. 6.5

2. Арка очерчена по окружности радиусом R (рис. 6.6). Через генеральные размеры l и f радиус R определяется из геометрии:

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f}, \quad (6.3)$$

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f. \quad (6.4)$$

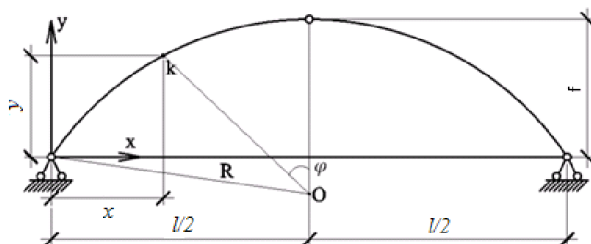


Рис. 6.6

$$\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2 \cdot R}; \quad \cos \varphi = \frac{R - (f - y)}{R}. \quad (6.5)$$

6.3. Определение реакций опор в арке

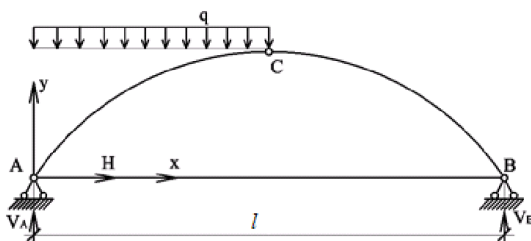


Рис. 6.7

Методика определения реакций опор в арке такая же, как и в трехшарнирной раме (рис. 5.21). Из уравнения $\sum M_B = 0$ определяется V_A , а из уравнения $\sum M_A = 0 - V_B$. Таким образом, вертикальные реакции V_A , V_B определяются, как в балке на двух опорах того же пролета и загруженной той же нагрузкой, т. е. $V_A = V_A^0$, $V_B = V_B^0$, где V_A^0 и V_B^0 – балочные вертикальные реакции.

Горизонтальная реакция H (распор) определяется из уравнения: $\sum M_C^{\text{прав сил}} = 0$, откуда получаем

$$H = \frac{M_C^0}{f}, \quad (6.6)$$

где M_C^0 – балочный момент в точке C .

Определение внутренних усилий M, Q, N в арке

Рассмотрим вычисление внутренних усилий в произвольной точке K , положение которой определяется координатами x и y (рис. 6.8).

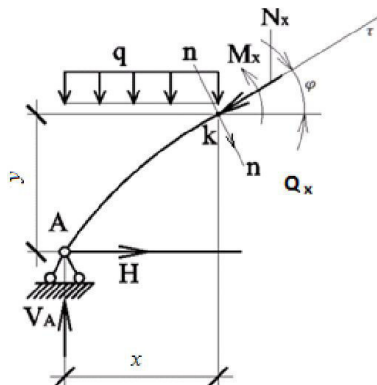


Рис. 6.8

Арка является сплошной системой, и в сечениях у нее возникают три внутренних усилия M, Q, N . По определению из курса «Сопротивление материалов», изгибающий момент M_x численно равен алгебраической сумме моментов всех сил, приложенных по одну сторону сечения:

$$M_x = V_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} - H \cdot y = \left(V_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) - H \cdot y. \quad (6.7)$$

Выражение в скобках представляет собой момент в аналогичной балке. Его называют балочным моментом и обозначают M_x^0 , тогда:

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y. \quad (6.8)$$

Из формулы видно, что изгибающий момент в арке меньше, чем в балке, на величину $H \cdot y$, т. е. наличие распора H разгружает арку. Поперечная сила Q определяется как сумма проекций внешних сил на нормаль $n - n$:

$$Q_x = V_A \cdot \cos \varphi - qx \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi = (V_A - qx) \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi.$$

Аналогично изгибающему моменту, обозначим $(V_A - q \cdot x)$ балочной поперечной силой Q_x^0 , тогда

$$Q_x = Q_x^0 \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi. \quad (6.9)$$

Продольная сила N определяется как сумма проекций внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на касательную к оси арки τ .

$$N_x = -(Q_x^0 \cdot \cos \varphi + H \cdot \sin \varphi). \quad (6.10)$$

Знак «минус» показывает, что продольная сила N является сжимающей.

Для построения эпюр обычно пролет арки разбивают на 8-10 участков и определяют все внутренние усилия в каждом сечении по приведенным формулам (6.8, 6.9, 6.10). В арке с затяжкой повышенного типа в местах прикрепления затяжки необходимо усилия вычислять два раза – ниже и выше затяжки. При вычислении усилий ниже затяжки в формулах не будет слагаемых, связанных с распором H . Все вычисления обычно ведутся в табличной форме.

Пример 6.1

Построить эпюры внутренних усилий M, Q, N для арки с надстройкой и затяжкой (рис. 6.9). Ось арки очерчена по квадратной параболе:

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2},$$

где $f = 10$ м, $l = 60$ м. Кроме того, дана координата затяжки $t = 3,6$ м.

Нагрузка известна: $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 3$ кН, $P_3 = 6$ кН, $q_1 = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $q_2 = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$.

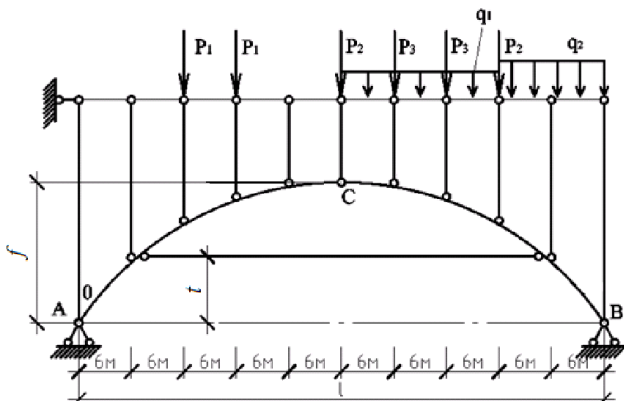


Рис. 6.9

Необходимо учесть, что нагрузки q_1 и q_2 распределены по узлам арки и на расчетной схеме арки отсутствуют.

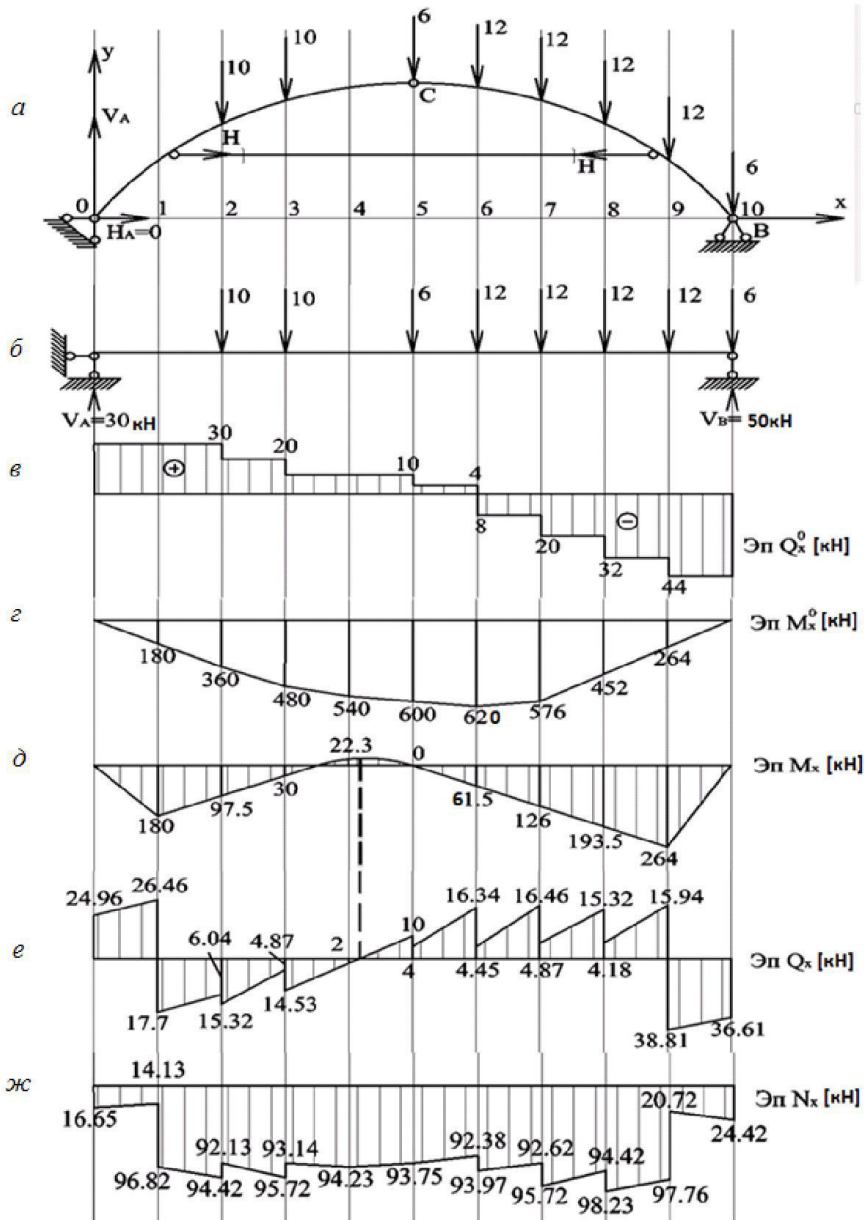


Рис. 6.10

Определение геометрических характеристик

В намеченных 10 сечениях определяем координаты оси арки y и углы наклона касательных φ . Вычисления приведены в таблице 6.1, строки 1-5. Покажем вычисления указанных характеристик для сечения 1. Точка 1: $x = 6$ м.

$$y_1 = \frac{4fx(l-x)}{l^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 6(48-6)}{60^2} = 3,6 \text{ м.}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f(l-2x)}{l^2} = \frac{4 \cdot 10(60-2 \cdot 6)}{48^2} = 0,533.$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,533^2}} = 0,882.$$

Аналогичным образом определяются геометрические характеристики для остальных точек. Результаты сведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

№ сечений	x (м)	y (м)	$\operatorname{tg} \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
0	0	0	0,667	0,555	0,832
1	6	3,6	0,533	0,471	0,882
2	12	6,4	0,4	0,371	0,928
3	18	8,4	0,267	0,258	0,966
4	24	9,6	0,133	0,132	0,991
5	30	10	0	0	1,0

Следует заметить, что в правой части арки $\operatorname{tg} \varphi$ и $\sin \varphi$ – отрицательные.

Балочные усилия Q_x^0 и M_x^0 показаны на рис. 6.10, а их значения и значения внутренних усилий Q_x, M_x, N_x в самой арке приведены в табл. 6.2, 6.3.

Для левой части арки в пределах от 0 до сечения C имеем два участка нагружения.

Участок 0-1 (ниже затяжки)

Внутренние усилия для этого участка

$$M_x = M_x^0; Q_x = Q_x^0 \cdot \cos \varphi; N_x = -Q_x^0 \cdot \sin \varphi.$$

Здесь M_x^0 – изгибающий момент для простой балки (рис. 6.10), Q_x^0 – поперечная сила для простой балки.

Участок 1-С (выше затяжки)

$$M_x = M_x^0 - H(y - t) = M_x^0 - H(y - 3,6).$$

$$Q_x = Q_x^0 \cdot \cos \varphi - H \sin \varphi.$$

$$N_x = -Q_x^0 \cdot \sin \varphi - H \cos \varphi.$$

В таблицах 6.2, 6.3 приведены результаты расчета для характерных сечений арки.

Таблица 6.2

№ Сеч.	x (м)	y (м)	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	M_x^0	$y - y_I$	$H(y - y_I)$	M_x
0	0	0	0,555	0,832	0	0	0	0
1	6	3,6	0,471	0,882	180	0	0	180
2	12	6,4	0,371	0,928	360	2,8	262,5	97,5
3	18	8,4	0,258	0,966	480	4,8	450	30
4	24	9,6	0,132	0,991	540	6,0	652,5	-22,5
5	30	10,0	0	1	600	6,4	600	0
6	36	9,6	-0,132	0,991	624	6,0	562,5	61,5
7	42	8,4	-0,258	0,966	576	4,8	450	126
8	48	6,4	-0,371	0,928	456	2,8	262,5	193,5
9	54	3,6	-0,471	0,882	264	0	0	264
10	60	0	-0,555	0,832	0	0	0	0

Таблица 6.3

№ Сеч.	Q_x^0	$Q_x^0 \cdot \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	Q_x	$Q_x^0 \cdot \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	N_x	$H'(y - y_I)$	M_x
0	30	24,96	0	24,96	16,65	0	-16,65	0	0
1л	30	26,46	0	26,46	14,13	0	-14,13	0	180
1п	30	26,46	44,16	-17,7	14,13	82,69	-96,82	0	180
2л	30	27,84	33,88	-6,04	11,13	87	-98,13	273	83
2п	20	18,56	33,88	-15,32	7,42	87	-94,42	273	83
3	20	19,32	24,19	-4,87	5,16	90,56	-95,72	459	21
4	10	9,91	12,38	-2,47	1,32	92,91	-94,23	566	-26
5	10	10	0	10	0	93,75	-93,75	600	0
6	4	3,96	-12,38	16,34	-0,528	92,91	-92,38	566	58
7	-8	-7,73	-24,19	16,46	2,06	90,56	-92,62	459	117
8	-20	-18,56	-33,88	15,32	7,42	87,0	-94,42	273	183
9л	-32	-28,22	-44,16	15,94	15,07	82,69	-97,76	0	264
9п	-44	-38,808	0	-38,815	20,724	0	-20,724	0	264
10	-44	-36,61	0	-36,61	24,42	0	-24,42	0	0

Определение реакций опор

Так как реакции опор определяются так же, как и балки такого же пролета, то на рис. 6.10, б приведена «заменяющая» балка. Следует иметь в виду, что в балке шарнира С нет.

$$\sum M_A = 0.$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{10 \cdot 12 + 10 \cdot 18 + 6 \cdot 30 + 48 \cdot 45 + 6 \cdot 60}{60} = 50 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0.$$

$$V_A = V_A^0 = \frac{10 \cdot 48 + 10 \cdot 42 + 6 \cdot 30 + 12 \cdot 24 + 12 \cdot 18 + 12 \cdot 12 + 12 \cdot 6}{60} = 30 \text{ кН}.$$

Проверка вертикальных реакций:

$$\sum Y = V_A^0 + V_B^0 - 10 - 10 - 6 - 12 \cdot 4 - 6 = 80 - 80 = 0.$$

Усилие в затяжке H определяется с учетом координаты затяжки

$$H = \frac{M_C^0}{f-t} = \frac{600}{10-3,6} = 93,75 \text{ кН},$$

где M_C^0 – момент левой (правой) части арки, вычисленный относительно шарнира C .

Определение внутренних усилий

Предварительно во всех сечениях определяются балочные величины Q_x^0 , M_x^0 (рис. 6.10, в, з), далее вычисляются внутренние усилия Q_x , M_x и N_x в самой арке по приведенным формулам для этих величин. Покажем вычисление этих усилий в точках 1, 6. Точка 1: $M_x = M_x^0 = 30 \cdot 6 = 180 \text{ кНм}$.

В точке прикрепления затяжки усилия Q_x и N_x вычисляем два раза – ниже и выше затяжки.

$$\text{Ниже затяжки: } Q_x = Q_x^0 \cdot \cos \varphi = 30 \cdot 0,882 = 26,46 \text{ кН}.$$

$$\text{Выше затяжки: } Q_x = Q_x^0 \cdot \cos \varphi - H \sin \varphi = 30 \cdot 0,882 - 93,75 \cdot 0,471 = 26,46 - 44,16 = -17,7 \text{ кН}.$$

Вычислим продольные силы N_x в той же точке 1.

$$\text{Ниже затяжки: } N_x = -Q_x^0 \cdot \sin \varphi = -30 \cdot 0,471 = -14,13 \text{ кН}.$$

Выше затяжки:

$$N_x = -Q_x^0 \cdot \sin \varphi - H \cos \varphi = -30 \cdot 0,471 - 93,75 \cdot 0,882 = -96,82 \text{ кН}.$$

Вычисления показывают, что в точках прикрепления затяжки на эпюрах Q_x и N_x имеются скачки (рис. 6.10, е, ж).

Далее приведены вычисления внутренних усилий в правой половине арки (сечения 6, 7), где $\text{tg } \varphi$ и $\sin \varphi$ имеют отрицательный знак, который учитывается при подстановке в формулы.

$$M_x = M_x^0 - H(y-t) = 624 - 93,75(9,6 - 3,6) = 624 - 93,75 \cdot 6 = -61,5 \text{ кНм}.$$

$$Q_x = Q_x^0 \cdot \cos \varphi - H \sin \varphi = 4 \cdot 0,991 - 93,75 \cdot 0,132 = 16,34 \text{ кН}.$$

$$N_x = -Q_x^0 \cdot \sin \varphi - H \cos \varphi = -4 \cdot 0,132 - 93,75 \cdot 0,991 = -92,91 + 0,528 = -92,38 \text{ кН}.$$

Все вычисления приведены в табл. 6.2, 6.3. Напряжения в арке определяются по формуле

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \left| \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \right|.$$

Анализируя построенные эпюры Q_x , M_x , N_x для арки и сравнивая их с балочными Q_x^0 , M_x^0 , видим, что в арке изгибающие моменты, поперечные силы по сравнению с балкой существенно уменьшаются, что является результатом влияния распора.

Необходимо заметить, что с увеличением уровня затяжки величина распора будет увеличиваться. При этом изгибающий момент в сечении арки будет возрастать. Наиболее рациональна будет конструкция арки при расположении затяжки на уровне опор.

7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

7.1. Понятие статически неопределимых систем

Статически неопределимыми системами называются такие системы, для определения усилий в которых недостаточно уравнений статики.

Разница между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики определяет число лишних неизвестных или степень статической неопределимости. При одной лишней неизвестной системе конструкция называется однажды статически неопределимой, при двух – дважды статически неопределимой и т. д. В дальнейшем степень статической неопределимости будем обозначать n .

Так, число неизвестных реакций балки (рис. 7.1, а) – четыре, а независимых уравнений статики для плоской произвольной системы сил можно составить три. Данная система однажды статически неопределима.

Балка (рис. 7.1, б) представляет систему трижды статически неопределимую. Незвестных реакций шесть, а уравнений статики три.

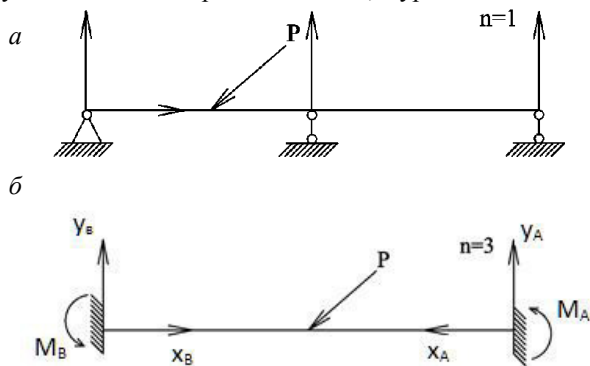


Рис. 7.1

На рис. 7.2, а показана рама дважды статически неопределимая, а на рис. 7.2, б – шесть раз статически неопределимая.

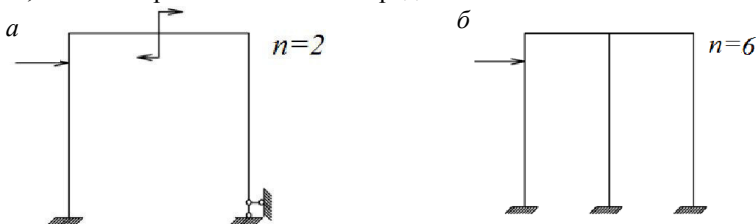


Рис. 7.2

Всякий замкнутый контур представляет собой систему трижды статически неопределимую (рис. 7.3, а, б, в). В любом сечении контура возникают три неизвестных усилия: момент и две силы.

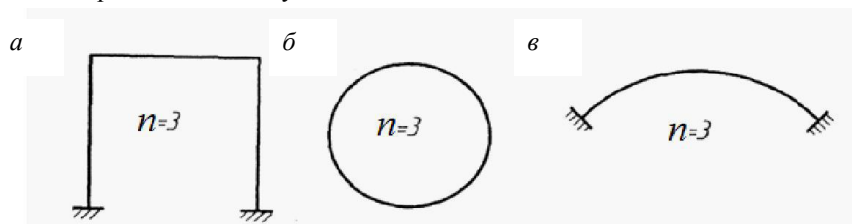


Рис. 7.3

Постановка одиночного шарнира (0) снижает степень статической неопределимости системы на единицу (рис. 7.4). Изгибающий момент в одиночном шарнире равен нулю.

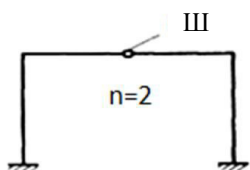


Рис. 7.4

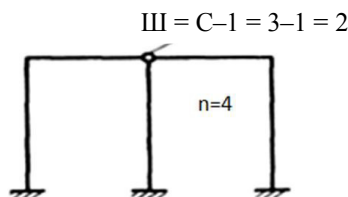


Рис. 7.5

Шарнир, включенный в узел, где сходятся стержни, снижает степень статической неопределимости системы на число одиночных шарниров, равных $\Pi = C - 1$, так как заменяет собой столько же одиночных шарниров. Здесь под C понимают число стержней, сходящихся в узле.

Так в раме (рис. 7.5) число стержней, сходящихся в шарнирном узле, $C = 3$. Степень статической неопределимости понижается на два, получаем $n = 4$.

Из рассмотренных примеров можно видеть, что статическая неопределимость системы обуславливается наличием лишних (избыточных) связей, усилий или реакций, которые представляют собой лишние неизвестные.

Под связью обычно понимают тела (препятствия), ограничивающие перемещения других тел, точек или сечений конструкции.

Лишними связями называются такие связи, удаление которых превращает заданную статически неопределимую систему в статически определимую, не нарушая ее геометрической неизменяемости.

Геометрически неизменяемой системой называется система, которая может изменять свою форму только за счет деформаций ее элементов (рис. 7.6, а, б, в).

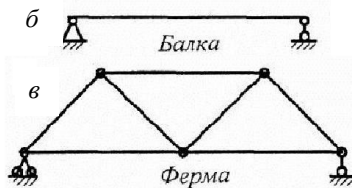
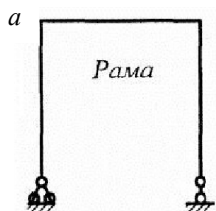


Рис. 7.6

Геометрически изменяемая система является механизмом. Она может изменять форму и размеры при отсутствии деформации (рис. 7.7).

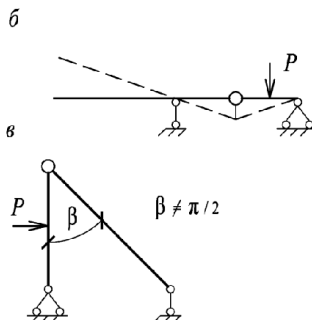
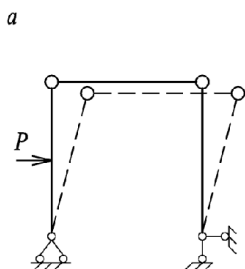


Рис. 7.7

7.2. Определение степени статической неопределимости в стержневых системах

В общем случае можно использовать для определения степени статической неопределимости формулу Чебышева:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0,$$

где Д – число дисков,

Ш – число простых (одиночных) шарниров,

C_0 – число опорных стержней.

Степень статической неопределимости определяем по зависимости:
 $n = -W$.

Так, применительно к раме на рис. 7.8 имеем:

$$n = -W = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3) = 1.$$

Данная рама один раз статически неопределимая, т. е. имеет одну лишнюю связь.

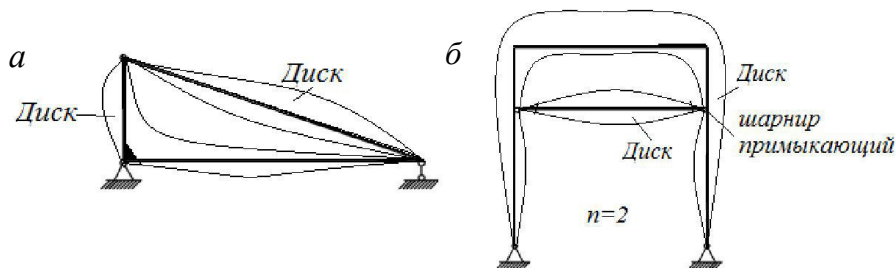


Рис. 7.8

Для рамы на рис. 7.8, б:

$$n = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 4) = 2.$$

В рамах удобно определять степень статической неопределимости по другой формуле:

$$n = 3K - \text{Ш}.$$

Здесь K – число замкнутых контуров,

Ш – количество простых шарниров.

Так для рамы (рис. 7.8, б) $K = 2$, $\text{Ш} = 4$, тогда $n = 2$.

Для рамы (рис. 7.9) $n = 2$.

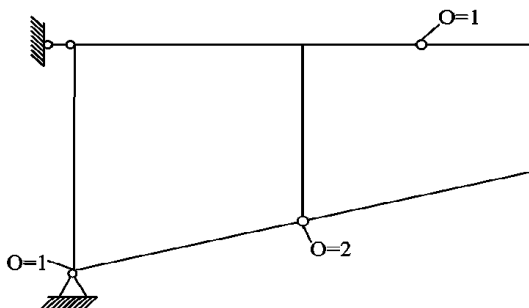


Рис. 7.9

$$K = 2, \text{ Ш} = 4; \quad n = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

По формуле Чебышева для этой рамы:

$$n = -W = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3) = 2.$$

В фермах (рис. 7.10) степень статической неопределимости также можно определять по формуле Чебышева или по формуле

$$n = 2Y - C,$$

где C – число стержней, включая стержни фермы (C_ϕ) и опорные стержни (C_o), т. е. $C = C_\phi + C_o$, а Y – количество узлов

Так, для фермы (рис. 7.10) имеем:

$$C_\phi = 5; C_o = 3; Y = 4.$$

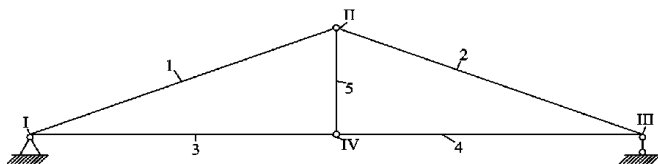


Рис. 7.10

Тогда $n = 2 \cdot 4 - 8 = 0$.

Данная ферма не имеет лишних связей, она статически определима.

По формуле Чебышева:

$$n = -W = -(3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3) = 0.$$

Необходимо иметь ввиду, если для любой системы $n = 0$, то она статически определима.

Если $n > 0$, то система статически неопределима, т. е. имеет лишние связи.

Для фермы (рис. 7.11):

$$Y = 6; C_\phi = 11; C_o = 3.$$

Тогда $n = 2 \cdot 6 - 14 = -2$.

Ферма (рис. 7.10) имеет две лишние связи.

При определении степени статической неопределимости по формуле $n = 2Y - C$, если $n < 0$, система статически неопределима, $n > 0$ – геометрически изменяемая, $n = 0$ – статически определимая.

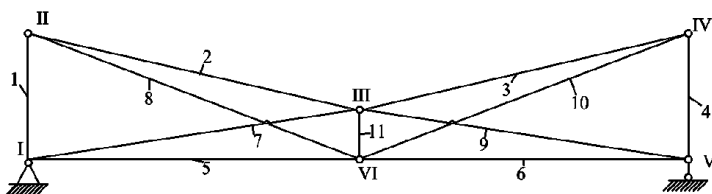


Рис. 7.11

Степень статической неопределимости неразрезных балок (рис. 7.12, а, б) можно определить по формуле Чебышева или, что проще, по количеству опорных связей.

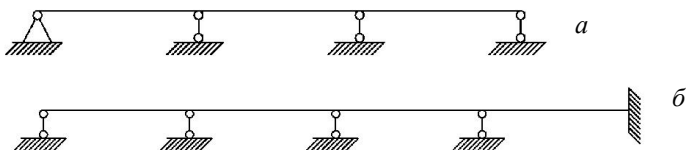


Рис. 7.12

Для обеспечения неподвижности балок необходимы три опорные связи. Все остальные связи являются избыточными. Следовательно, для неразрезных балок степень статической неопределимости можно найти по формуле

$$n = R - 3,$$

где R – число опорных связей (реакций).

Так для балки на рис. 7.12, a $n = 5 - 3 = 2$, а для балки на рис. 7.12, $б$ $n = 7 - 3 = 4$.

В последнем случае правый конец балки имеет заделку, что эквивалентно трем опорным связям.

В фермах если степень статической неопределимости $n \geq 1$, то система геометрически изменяемая (рис. 7.7, a), для нее $n = 2 \cdot 4 - (3 + 4) = 1$.

Данная система представляет собой механизм первого класса с одной степенью свободы.

Наряду с отмеченным различают еще мгновенно изменяемые системы (рис. 7.13, $б$). Такая система допускает бесконечно малые перемещения элементов относительно друг друга без деформации. Линии действия реактивных усилий (рис. 7.13, $б, в$) сходятся в одной точке K .

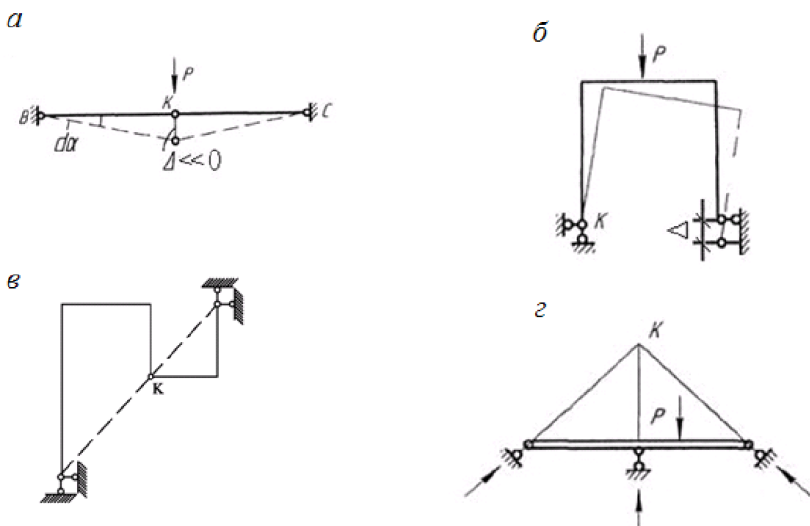


Рис. 7.13

Геометрически изменяемые и мгновенно изменяемые системы в конструкции или сооружении недопустимы.

7.3. Сущность метода сил

Метод сил является общим и одним из основных методов раскрытия (решения) статической неопределимости систем. Рассмотрим сущность этого метода на примере статически неопределимой рамы (рис. 7.14.)

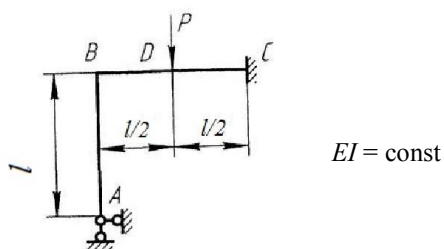


Рис. 7.14

Нагрузку P , размеры стержней рамы и их жесткости EI считаем известными.

Порядок расчета:

1) Преобразуем заданную систему в статически определимую, геометрически неизменяемую и эквивалентную заданной системе. Для этого удаляем лишние связи путем их отбрасывания или перерезания. Полученная статически определимая система называется основной (рис. 7.14). Здесь необходимо иметь в виду, что удаление связей необходимо производить таким образом, чтобы основная система была геометрически и мгновенно неизменяема.

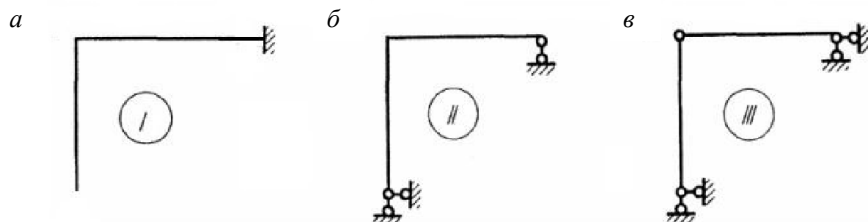


Рис. 7.15

В зависимости от выбора лишних связей можно получить несколько вариантов основных систем. Необходимо также принять такой вариант, для которого эпюры внутренних усилий строятся просто, а объем вычислений получается наименьшим. Применительно к нашему случаю вариант на рис. 7.15, а является более предпочтительным: здесь нет необходимости определять опорные реакции, если строить эпюры со свободного конца.

2) Образует эквивалентную систему. Для этого действия отброшенных или расчетных связей заменяем неизвестными усилиями (опорными реакциями, усилиями в разрезах). В связи с этим данный метод и получил название метода сил. Кроме неизвестных усилий отброшенных связей, прикладываем к основной системе заданные силы. Полученная основная система, нагруженная заданными внешними силами и усилиями отброшенных (перерезанных) связей, называется эквивалентной системой (рис. 7.16).

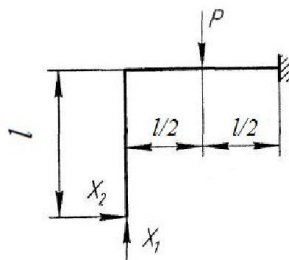


Рис. 7.16

3) Составляем канонические уравнения, которые выражают в математической форме условия эквивалентности основной и заданной системы. Иначе они выражают условия, что относительные перемещения по направлению удаленных лишних связей от совместного действия нагрузки и неизвестных усилий должны быть равны нулю.

Для нашего случая канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} &= 0, \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где Δ_{11} – относительное перемещение в основной системе по направлению лишней неизвестной X_1 , вызванное этим же усилием;

Δ_{12} – относительное перемещение по направлению лишней неизвестной X_1 , вызванное усилием X_2 ;

Δ_{1P} – относительное перемещение по направлению действия неизвестной X_1 , вызванное заданной нагрузкой.

Из канонических уравнений следует, что первое из них имеет физический смысл:

перемещение в основной системе по направлению лишнего неизвестного X_1 от совместного действия заданной нагрузки и полных значений неизвестных X_1 и X_2 равно нулю.

Аналогичный смысл имеет и второе уравнение. В указанном виде использование уравнений неудобно, поэтому их преобразуем к такому виду, учитывая, что

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \delta_{11} \cdot X_1, \\ \Delta_{12} &= \delta_{12} \cdot X_2, \\ \Delta_{21} &= \delta_{21} \cdot X_1, \\ \Delta_{22} &= \delta_{22} \cdot X_2, \end{aligned}$$

где δ_{11} – перемещение в основной системе по направлению действия силы X_1 от действия силы $X_1 = 1$;

δ_{21} – перемещение в основной системе по направлению действия силы X_2 от действия силы $X_1 = 1$ (рис. 7.17).

Аналогично определяем перемещение от $X_2 = 1$.

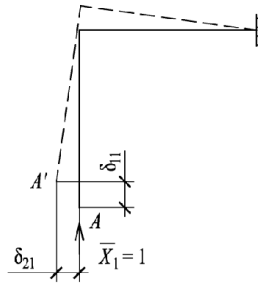


Рис. 7.17

Окончательно канонические уравнения принимают вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0.$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

По аналогии для n раз статически неопределимых систем канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n + \Delta_{3P} &= 0, \\ &\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Здесь коэффициенты с одинаковыми индексами $\delta_{11}, \dots, \delta_{ii}$ называют главными, а $\delta_{12}, \delta_{21}, \dots, \delta_{ij}, \delta_{ji}$ называют побочными.

Главные коэффициенты всегда положительны. Побочные коэффициенты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Δ_{1P} называются свободными или грузовыми коэффициентами.

Для определения неизвестных усилий X_1, X_2 необходимо решить совместно систему уравнений, предварительно определив значения коэффициентов при неизвестных и свободные члены.

4) Определяем коэффициенты при неизвестных и свободные члены. Для этого в общем случае используем метод Мора, а в частном, когда стержни прямолинейны, метод Верещагина с использованием формул трапеции и Симпсона.

Порядок определения коэффициентов:

а) строим эпюру изгибающих моментов в основной системе от заданных сил – M_p (рис. 7.18);



Рис. 7.18

б) строим эпюру изгибающих моментов в основной системе от единичной силы $X_1 = 1$ (рис. 7.19);

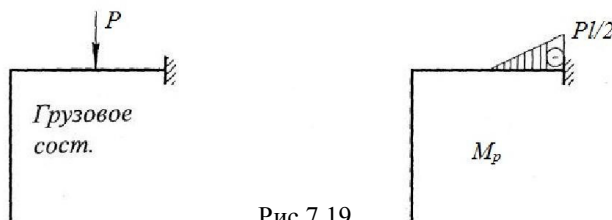


Рис. 7.19

Рис. 7. 19

в) Строим эпюру изгибающих моментов в основной системе от единичной силы $X_2 = 1$ (рис. 7.20).

Вообще рационально строить единичные эпюры прямо на «загрузке», как это показано на рис. 7.20.

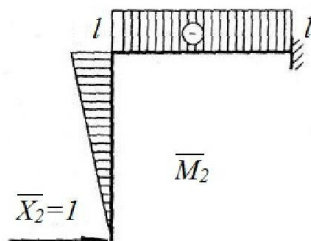


Рис. 7.20

Вычисляем коэффициенты с помощью интеграла Мора и правила Верещагина, с использованием формулы Симпсона и трапеций. Для нашей рамы коэффициенты: δ_{11} , δ_{12} , Δ_{1P} , Δ_{2P} , δ_{11} , δ_{22} .

Находим по формулам:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI},$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \delta_{21} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M_1} \cdot \overline{M_2}}{EI} dx; & \delta_{12} &= \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot l = -\frac{l^3}{2EI}; \\ \delta_{22} &= \sum \int_0^l \frac{\overline{M_2}^2}{EI} dx; & \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l + \frac{1}{EI} \cdot l \cdot l \cdot l = \frac{4l^3}{3EI}; \\ \Delta_{1P} &= \sum \int_0^l \frac{\overline{M_1} \cdot M_P}{EI} dx; & \Delta_{1P} &= -\frac{1}{6EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(0 + 2 \cdot \frac{Pl}{2} \cdot l + 0 + \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) = -\frac{5Pl^3}{48EI}; \\ \Delta_{2P} &= \sum \int_0^l \frac{\overline{M_2} \cdot M_P}{EI} dx; & \Delta_{2P} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l = \frac{Pl^3}{8EI}.\end{aligned}$$

Так как наша система состоит только из прямолинейных стержней, то вычисления производим по способу Верещагина, путем перемножения соответствующих эпюр. В общем случае используются формулы Симпсона и трапеций.

После определения коэффициентов выполняется решение канонических уравнений и определяются значения неизвестных усилий

$$X_1; X_2 \quad \left(X_1 = \frac{11}{28}P; X_2 = \frac{3}{56}P \right).$$

Таким образом раскрывается статическая неопределимость системы.

5) Учитывая найденные неизвестные усилия X_1 и X_2 , строим окончательные (действительные) эпюры внутренних силовых факторов для заданной системы. Построение эпюр можно выполнить двумя способами.

I. Первый способ:

Загружаем основную систему заданной нагрузкой и найденными усилиями X_1 и X_2 (рис. 7.21, а). После чего строим эпюры M , Q , и N так же, как для обычной статически определимой системы (рис. 7.21, б). Наиболее удобен этот способ для простых систем.

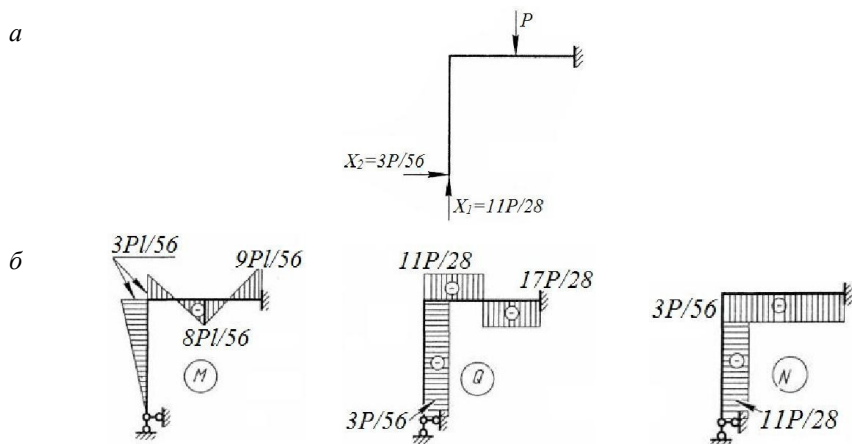


Рис. 7.21

II. Вторым способ:

Вычисляем изгибающие моменты в любом сечении (обычно в характерном) по формуле:

$$M^i = M_P^i + \bar{M}_1^i \cdot X_1 + \bar{M}_2^i \cdot X_2,$$

где M_P^i – значение изгибающего момента в сечении, вызванное внешней нагрузкой (берется из эпюры « M_P »), \bar{M}_1^i , \bar{M}_2^i – значения изгибающих моментов в данном сечении от действия единичных сил, соответственно $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$.

Порядок определения изгибающих моментов по второму способу:

а) Строим эпюру $\bar{M}_1 X_1$, для чего ординаты единичной эпюры момента \bar{M}_1 увеличиваем в X_1 раз (рис. 7.22, а), а затем аналогичным образом строим эпюру $\bar{M}_2 X_2$ (рис. 7.22, б).

После чего складываем алгебраически ординаты моментов в характерных сечениях, т. е. учитывая знаки моментов в рассматриваемых сечениях. Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 7.22, г.

Эпюру поперечных сил строим по эпюре изгибающих моментов M путем вырезания стержней. Обход делаем по контуру, последовательно вырезая стержни и рассматривая их как балку на двух опорах, причем для удобства стержни можно поворачивать.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B; \quad \sum M_B = 0 \rightarrow R_A; \quad R_A = R_B = 3/56 \cdot P.$$

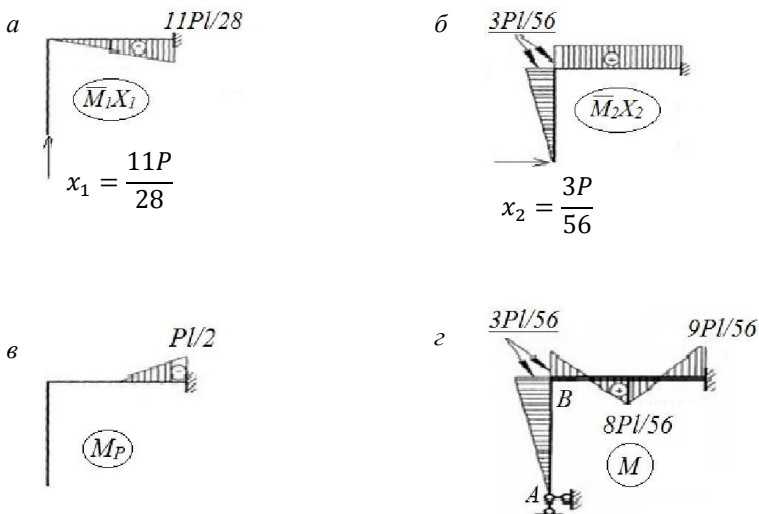


Рис. 7.22

При этом на концах прикладываем значение моментов, определенных из эпюры M , а также внешние силы, действующие на стержень, если они есть.

Затем определяются реакции опор, и строится эпюра « Q » для заданного стержня. Например, для стержня AB (рис. 7.23) в сечении B применен момент $M = 3Pl/56$, взятый из эпюры « M ». Внешних сил нет.

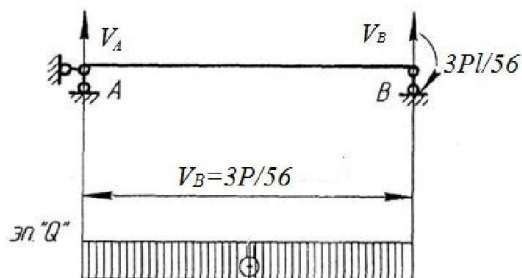


Рис. 7.23

Аналогичным образом, сечениями, бесконечно близкими к узлу B и заделки C , вырезаем второй стержень со стороны заделки (рис. 7.24). По концам прикладываем моменты, взятые в соответствующих сечениях их эпюр M , и внешнюю силу P .

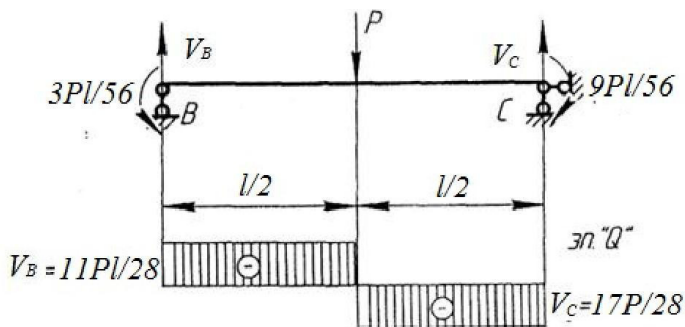


Рис. 7.24

Из условия равновесия находим опорные реакции:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_C = \frac{17}{28}P; \quad \sum M_C = 0 \rightarrow R_B = \frac{17}{28}P.$$

После этого переносим эпюры « Q » для стержней на заданную систему. Окончательная эпюра поперечных сил для заданной рамы показана на рис. 7.25.

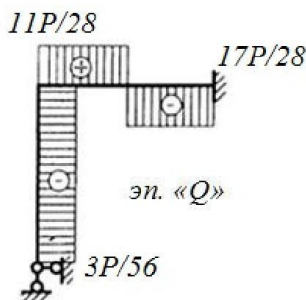


Рис. 7.25

Эпюру продольных сил для заданной системы строим по эпюре « Q » путем вырезания узлов (опорные узлы не вырезаем, а только внеопорные).

Вырезаем узел B (рис. 7.26). Прикладываем к нему поперечные силы, взятые в соответствующих сечениях « Q » (рис. 7.25), а также внешние силы, если они приложены к узлу (в нашем случае они отсутствуют). Узел должен находиться в равновесии, под действием внешних сил, поперечных и неизвестных продольных. Из условия равновесия узла определяем неизвестные продольные силы, составляя уравнения равновесия статики. Эпюра продольных сил показана на рис. 7.27.

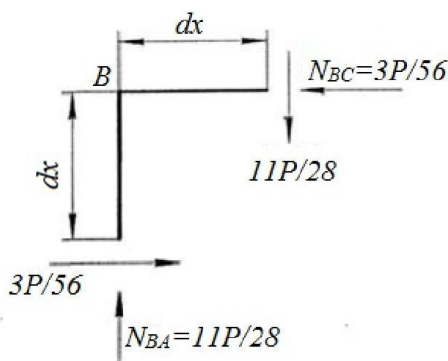


Рис. 7.26

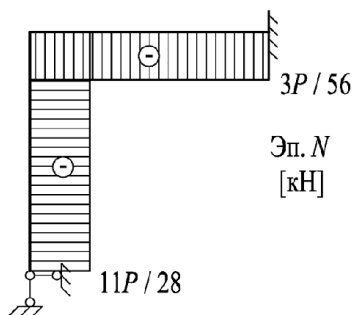


Рис. 7.27

Проверка правильности решения

1. Деформационная проверка.

Она заключается в определении некоторого перемещения, которое заранее известно. Например, перемещение в направлении любой из отброшенных

(перерезанных) связей должно быть равно нулю. Эту проверку выполняем по формуле Мора:

$$\sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_i}{EI} dx \cong 0.$$

Здесь M – действительная эпюра изгибающих моментов в заданной системе.

\bar{M}_i – эпюра изгибающих моментов, вызванная единичным усилием в основной системе, приложенная по направлению отброшенной перерезанной связи.

Необходимо заметить, что для деформационной проверки можно использовать любую другую основную систему, эквивалентную заданной, и построив для нее эпюры от единичных усилий \bar{M}_i , перемножить ее с эпюрой действительных моментов M . Если расчет выполнен правильно, то перемножение должно давать значение, близкое к нулю.

Для нашего случая, например, перемножение эпюр M и \bar{M}_1 , по правилу Верещагина с использованием формулы трапеций, имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} dx &= \frac{l/2}{6EI} \left(0 + 2 \cdot \frac{8Pl}{56} \cdot \frac{l}{2} + 0 - \frac{3Pl}{56} \frac{l}{2} \right) + \\ &+ \frac{l/2}{6EI} \left(2 \cdot \frac{8Pl}{56} \frac{l}{2} - 2 \cdot \frac{9Pl}{56} l - \frac{9Pl}{56} \frac{l}{2} + \frac{8Pl}{56} l \right) = \frac{Pl}{12 \cdot 56} (6,5 - 6,5) \cong 0. \end{aligned}$$

Это означает, что вычисления проведены верно.

Аналогично выполняем проверку по направлению второй отброшенной связи, от действия $X_2 = 1$, т. е. перемножаем эпюру \bar{M}_2 и M .

$$\sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_2}{EI} dx \equiv 0.$$

Здесь эти вычисления опущены.

2. Окончательной проверкой является статическая проверка. Для этой проверки из рамы вырезают узлы сечениями, бесконечно близкими к ним, прикладывают к ним внутренние усилия (M, Q, N) , взятые в соответствующих сечениях из эпюр M, Q, N , а также внешние нагрузки – сосредоточенные силы или моменты, если они приложены к узлу. Узел под действием всех сил должен находиться в равновесии.

Должны соблюдаться уравнения равновесия статики:

$$\sum x \equiv 0; \sum y \equiv 0; \sum M_i \equiv 0.$$

Необходимо заметить, что не только узлы, а любая часть рамы, балки или в целом сама рассматриваемая система должны находиться в равновесии, если расчеты выполнены верно. Для нашей рамы эти условия выполняются.

7.4. Расчет статически неопределимой неразрезной балки методом сил

Рассмотрим балку (рис. 7.28, *а*) постоянной жесткости $EI = \text{const}$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q_1 = 24 \text{ кН/м}$, $q_2 = 36 \text{ кН/м}$, сосредоточенной силой $P = 20 \text{ кН}$, сосредоточенным моментом $M = 60 \text{ кНм}$.

Подобрать сечение балки в виде двутавра, если расчетное сопротивление $R = 160 \text{ МПа}$. Геометрические размеры известны, расстояние между опорами составляет 6 м, а длина консоли – 2 м.

Решение:

1. Степень статической неопределимости данной балки равна двум ($n = 5 - 3 = 2$), неизвестными являются пять опорных реакций, а уравнений равновесия статики имеем только три.

2. Основную систему (рис. 7.28, *б*) получим путем введения шарниров над промежуточными опорами *В* и *С*. Таким образом, основная система представляет собой систему трех однопролетных балок, независимых друг от друга.

3. Эквивалентная система показана на рис. 7.28, *в*. Лишние неизвестные x_1 и x_2 представляют собой изгибающие моменты над опорами *В* и *С*.

4. Уравнения эквивалентности заданной и основной систем (канонические уравнения метода сил) имеют вид:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

5. Построение единичных эпюр (рис. 7.28, *г, д*) и определение единичных перемещений (коэффициентов при неизвестных).

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 = \frac{4}{EI},$$

$$\delta_{22} \sum \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx = \delta_{11} = \frac{4}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{EI}.$$

6. Построение грузовой эпюры M_p (рис. 27, *е*) и вычисление грузовых коэффициентов (свободных членов).

При вычислении грузовых коэффициентов использованы формула «трапеций» на прямолинейных участках эпюр и формула Симпсона – на криволинейных.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dx = -\frac{6}{EI} \left(0 \cdot 40 + 4 \cdot 88 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 \right) + \frac{3}{6EI} \left(2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 + 30 \cdot 1 \right) + \frac{3}{6EI} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \right) = -\frac{161}{EI}.$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} \left(2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} \left(-2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 30 \cdot 1 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} \left(1 \cdot 0 - 4 \cdot 88 \cdot \frac{3}{4} - 81 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} \left(2 \cdot 81 \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{197,25}{EI}.$$

7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов M . Значения ординат эп. M вычисляем по формуле $M = M_p + 29,78 \cdot \bar{M}_1 + 41,87 \cdot \bar{M}_2$ в характерных сечениях балки: в середине пролета AB , слева и справа от сосредоточенного момента $M = 60$ кНм, в середине загруженного участка пролета CD .

$$M_1 = 88 - 29,78 \cdot 0,5 = 73,11 \text{ кНм.}$$

$$M_2 = -30 - 29,78 \cdot 0,5 - 41,87 \cdot 0,5 = -65,82 \text{ кНм.}$$

$$M_3 = 30 - 29,78 \cdot 0,5 - 41,87 \cdot 0,5 = -5,82 \text{ кНм.}$$

$$M_4 = 81 - 41,87 \cdot 0,75 = 49,60 \text{ кНм.}$$

$$M_5 = 81 - 41,87 \cdot 0,5 = 60,06 \text{ кНм.}$$

Значения изгибающих моментов на опорах B и C равны $X_1 = X_2$ соответственно.

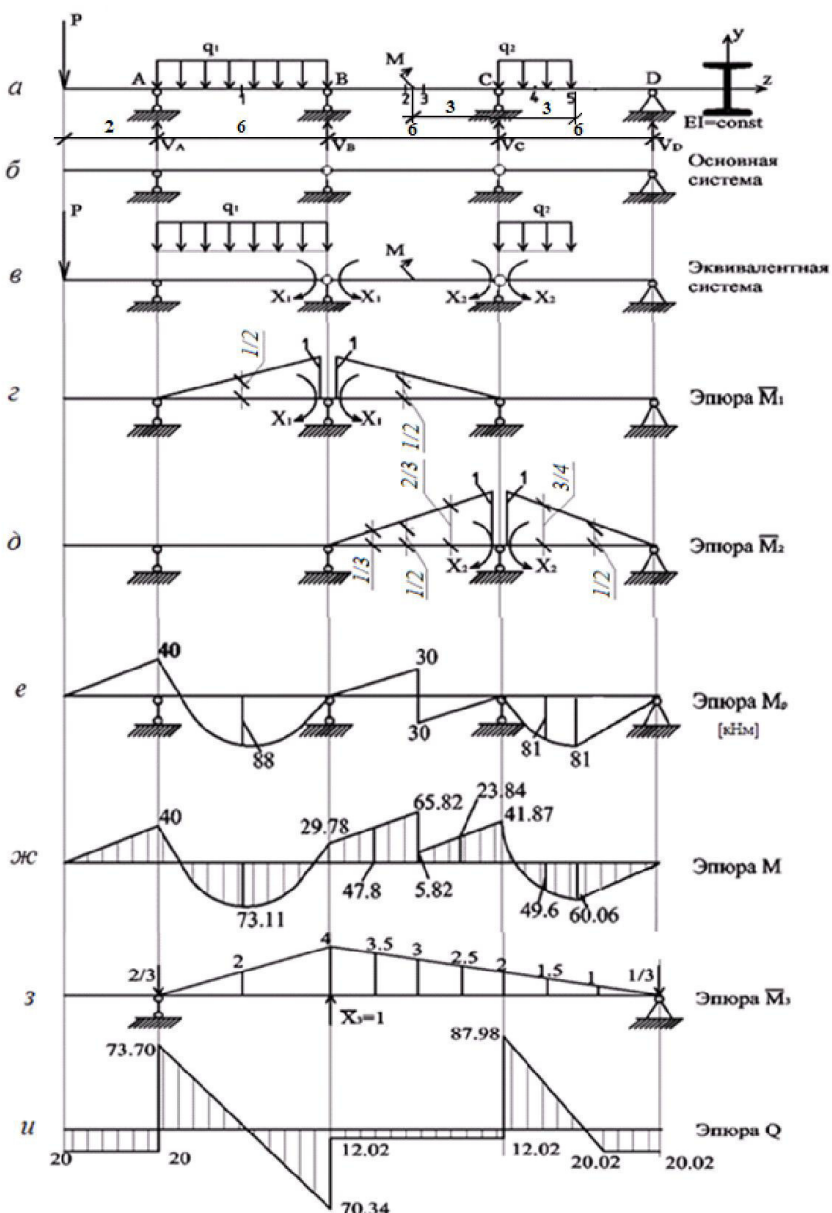


Рис. 7.28

8. Деформационная проверка эюры M . Для выполнения этой проверки принимаем другую основную систему (рис. 7.28, з) и строим эюру \overline{M}_3 . Вычислим перемещение сечения B , которое должно быть равно нулю, по формуле Мора:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_3 M}{EI} dx = 0.$$

$$\begin{aligned} & 6/6EI (0 + 4 \cdot 73,11 \cdot 2 + 29,78 \cdot 4) + 3/6EI (29,78 \cdot 4 + 4 \cdot 47,8 \cdot 3,5 + 65,82 \times \\ & \times 3) + 3/6EI (5,92 \cdot 3 + 4 \cdot 23,84 \cdot 2,5 + 41,87 \cdot 2) + 3/6EI (41,87 \cdot 2 - 4 \cdot 49,6 \times \\ & \times 1,5 - 60,06 \cdot 1) - 1/EI \cdot 1/2 \cdot 3 \cdot 60,06 \cdot 2/3 = 1/EI (823,68 - 323,77) \approx 0. \end{aligned}$$

Деформационная проверка выполняется.

9. Построение эюры поперечных сил способом вырезания стержней (рис. 7.29, а, б, в).

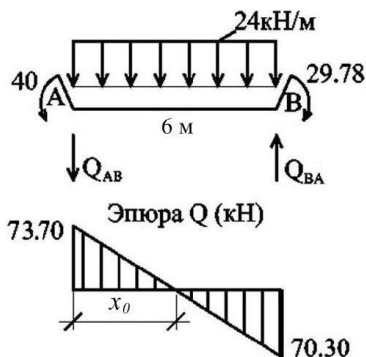


Рис. 7.29, а

На консольном участке $Q = -20$ кН.

Пролет $A-B$

$$\sum M_A = 0; \quad -40 + 24 \cdot 6 \cdot 3 + 29,78 - Q_{BA} \cdot 6 = 0.$$

$$Q_{BA} = 70,30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad Q_{AB} \cdot 6 - 40 - 24 \cdot 6 \cdot 3 + 29,78 = 0.$$

$$Q_{AB} = 73,70 \text{ кН.}$$

Проверка $\sum Y = 0$.

$$73,70 - 24 \cdot 6 + 70,30 = 144 - 144 = 0.$$

Уточняем эюру действительных моментов M на этом участке. Для этого найдем значения x_0 , где $Q = 0$.

Составляем выражения для поперечной силы, рассматривая левую часть балки

$$Q_{x_0} = Q_{AB} - q_1 \cdot x_0 = 73,7 - 24 \cdot x_0 = 0.$$

$$\text{Отсюда } x_0 = \frac{73,7}{24} = 3,07 \text{ м.}$$

Изгибающий момент в этом сечении

$$M_{x_0=3,07} = 73,7 \cdot 3,07 - \frac{24 \cdot (3,07)^2}{2} - 40 = 226,26 - 153,1 = 73,16 \text{ кНм.}$$

Пролет $B - C$

$$Q_{BC} = Q_{CB} = \frac{-29,78 + 60 + 41,87}{6} = 12,02 \text{ кН.}$$

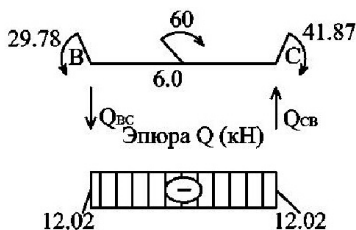


Рис.7.29, б

Пролет $C - D$

$$\sum M_C = 0; \quad -41,87 + 36 \cdot 3 \cdot 1,5 - Q_{DC} \cdot 6 = 0.$$

$$Q_{DC} = 20,02 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0; \quad Q_{CD} \cdot 6 - 41,87 - 36 \cdot 3 \cdot 4,5 = 0.$$

$$Q_{CD} = 87,98 \text{ кН.}$$

Проверка $\sum Y = 0$.

$$87,98 - 36 \cdot 3 + 20,02 = 108 - 108 = 0.$$

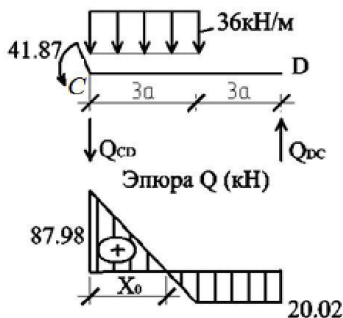


Рис. 7.29, в

Определяем, как рассмотрено выше для участка AB , значения максимального изгибающего момента для этого участка.

$$Q_{x_0} = 87,98 - 36 \cdot x_0 = 0,$$

$$x_0 = \frac{87,98}{36} = 2,44 \text{ м.}$$

$$M_{x0} = 87,98 \cdot 2,44 - \frac{36 \cdot (2,44)^2}{2} - 41,87 = 214,67 - 149,03 = 65,64 \text{ кНм.}$$

10. По этой эпюре Q находим реакции в балке (рис. 7.28, a , u): они равны величинам скачков на эпюре Q над опорами.

Реакция в опоре A .

$$V_A = 20 + 73,7 = 93,7 \text{ кН.}$$

$$V_B = 70,3 - 12,02 = 58,28 \text{ кН.}$$

$$V_C = 12,02 + 87,98 = 100 \text{ кН.}$$

$$V_D = 20,02 \text{ кН.}$$

Реакции показаны на рис. 7.28, a .

11. Выполняем статическую проверку.

Составляем уравнение равновесия для всей балки в форме суммы проекций всех сил на ось Y : оно должно быть тождественно равно нулю, если усилия найдены правильно.

$$\sum Y = 0.$$

$$\sum Y = -20 - 20 \cdot 6 - 36 \cdot 3 + 93,7 + 58,28 + 100 + 20,02 = -272 + 272 = 0.$$

Можно составить уравнения равновесия в форме суммы моментов всех сил (включая и опорные реакции) относительно любой точки. Оно тоже должно быть равно нулю, если решение выполнено верно, т. е. $\sum M_i \equiv 0$

12. Производим подбор сечения в виде двутавра. Используем условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq R.$$

Из эпюры моментов M находим $M_{\max} = 65,64 \text{ кНм}$, который имеет место на участке CD .

Требуемый момент сопротивления

$$W_z = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{65,64 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 410 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 410 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента принимаем двутавр № 27 а, $W_z^I = 407 \text{ см}^3$, фактическое напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{65,64 \cdot 10^3}{407 \cdot 10^{-6}} = 161,28 \text{ МПа.}$$

Расхождение

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{161,28 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0,8.$$

Расхождение невелико, находится в пределах допустимой нормы.

7.5. Расчет статически неопределимой фермы по методу сил

7.5.1. Понятие статически неопределимой фермы

Статически неопределимыми называются фермы, в которых нельзя определить опорные реакции или усилия в стержнях с помощью уравнений равновесия статики. Степень статической неопределимости ферм определяется по формуле:

$$n = C - 2Y,$$

где n – степень статической неопределимости; C – число стержней фермы (включая опорные); Y – число узлов.

На рис. 7.30 показаны некоторые типы статически неопределимых ферм.

На рис. 7.30, *а* показана ферма на трех опорах, которая является статически неопределимой, т. к. нельзя определить опорные реакции.

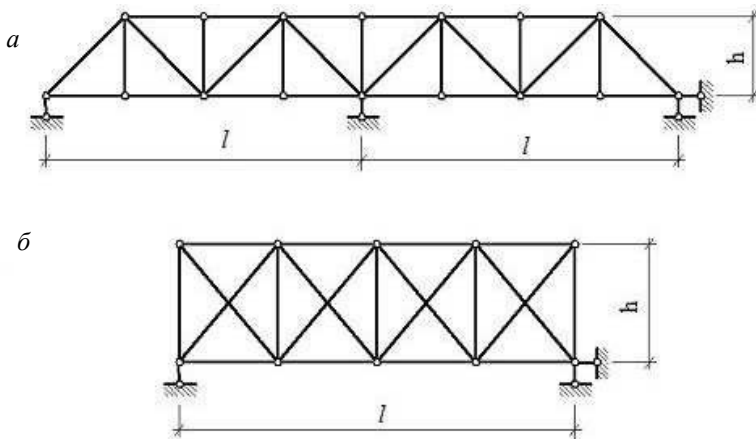


Рис. 7.30

В ферме на двух опорах на рис. 7.30, *б* реакции в опорах легко найти, но усилия в стержнях определить нельзя.

Для определения усилий в статически неопределимых фермах, как и при расчете неразрезных балок и рам, применяют метод сил.

Определим степень статической неопределимости ферм, изображенных на рис. 7.30. Для фермы (рис. 7.30, *а*) число стержней, включая четыре опорных стерженька, будет $C = 29 + 4 = 33$; число узлов $Y = 16$.

$$n = C - 2Y = 33 - 2 \cdot 16 = 1.$$

Для фермы (рис. 7.30, *б*) $C = 21 + 3 = 24$; $Y = 10$; $n = C - 2Y = 24 - 2 \cdot 10 = 4$.

На рис. 7.31 показаны возможные варианты основных систем по методу сил. Для ферм, изображенных на рис. 7.31, можно воспользоваться свойством симметрии.

Для фермы (рис. 7.31, б) при симметричной нагрузке $X_4 = X_1$, $X_3 = X_2$ (рис. 7.31, б). Следовательно, эта ферма дважды статически неопределима.

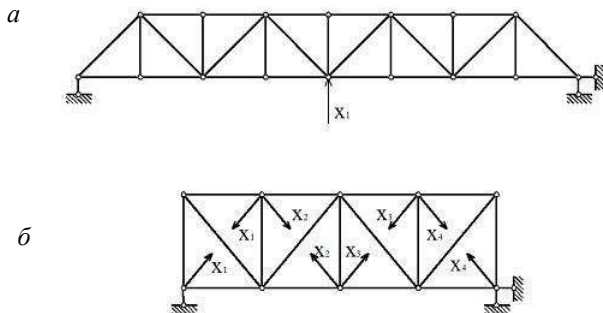


Рис. 7.31

Пример 7.1

Определить усилия в стержнях симметричной фермы от заданной нагрузки. Жесткости всех стержней одинаковы и равны EA . $P = 20 \text{ kH}$.

Длина пролета $l = 18 \text{ м}$, высота $h = 9 \text{ м}$.

Решение

1) Устанавливается степень статической неопределимости:

$$n = C - 2V = 23 + 4 - 2 \cdot 13 = 1.$$

Таким образом, ферма единожды статически неопределима, т. е. имеет лишнюю связь.

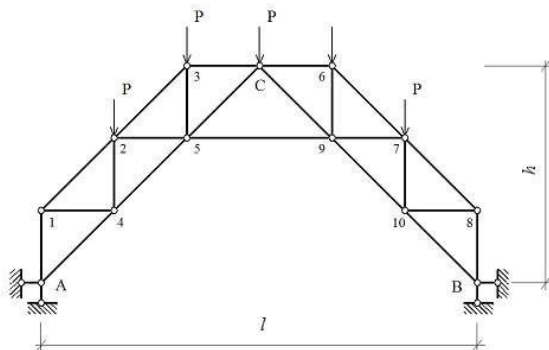


Рис. 7.32

2) Образует основную систему метода сил. Для этого удаляем лишнюю связь путем отбрасывания одного стержня. Основную систему метода сил можно выбрать разными способами, но они должны быть статически определимыми и геометрически неизменяемыми. На рис. 7.33, а, б приведены два варианта основной системы для рассматриваемой фермы.

3) Образует эквивалентную систему путем загрузки основной системы внешними силами P и усилиями отброшенных связей.

4) Записываем каноническое уравнение метода сил, решение которого определит . Применительно к основным системам (рис. 7.33, а и рис. 7.33, б) канонические уравнения имеют вид:

Следует отметить, что вид канонического уравнения не зависит от вида основной системы, но физический смысл неизвестного зависит.

относительное перемещение в основной системе по направлению действия силы от действия этой силы

называется свободным или грузовым коэффициентом представляет собой относительное перемещение в основной системе по направлению действия силы , но вызванное внешней нагрузкой

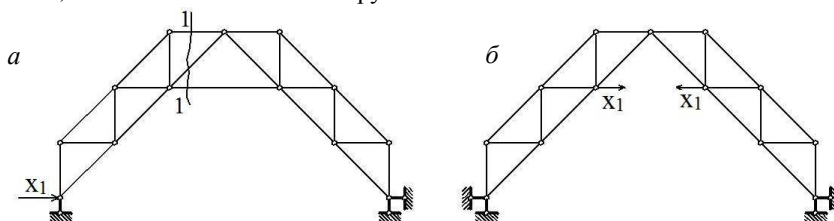


Рис. 7.33

Коэффициенты и определяются по формуле Мора:

$$\Delta_{11} = \sum \frac{N_i \bar{N}_i}{E F_i} + \sum \frac{M_i \bar{M}_i}{E I_i} + \sum \frac{F_i \bar{F}_i}{E F_i} + \sum \frac{F_{ti} \bar{F}_{ti}}{E F_{ti}}$$

5) Определяем коэффициенты. Для этого загружаем основную систему силой по направлению отброшенной связи (рис. 7.34, а) и находим усилия во всех стержнях фермы.

Как видно из этих формул, для вычисления и надо определить усилия N_p в основной системе от заданной нагрузки (рис. 7.34, б) и от силы усилия \bar{N}_1 (рис. 7.34, а). Можно построить эти эпюры, но удобнее усилия показать на стержнях фермы (рис. 7.34).

В дальнейшем расчет выполним для основной системы, приведенной на рис. 7.34, а. Усилия в стержнях основной системы определены способом вырезания узлов. Усилие в затяжке 5-9 (рис. 7.32) определено способом сквозного сечения 1-1 из уравнения равновесия моментов левой части относительно точки С (рис. 7.33, а).

Результаты вычислений приведены на рис. 7.34, а (усилия от единичной силы) и на рис. 7.34, б (усилия в стержнях от заданной нагрузки,).

б) Находим грузовой коэффициент . Для этого загружаем основную систему внешней нагрузкой (рис. 7.34, б) и находим усилия во всех стержнях, как выше.

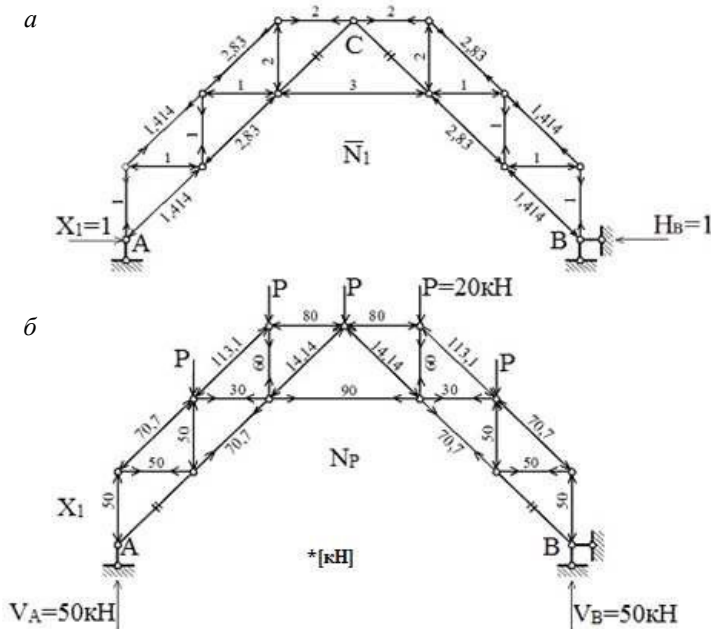


Рис. 7.34

Вычисления и сведены в таблицу 7.1. Так как ферма симметричная, то в таблицу запишем только стержни левой половины фермы.

На основании этой таблицы, учитывая симметрию фермы, находим

;

б. С учетом найденных значений находим значение лишнего неизвестного.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{9638}{295,76} = 32,59 \text{ кН.}$$

Вычисления усилий для основной системы записаны в табл. 7.1.

Определив X_1 , тем самым раскрываем статическую неопределимость заданной фермы.

7. Находим действительные усилия $N_i l$ в стержнях фермы по формуле

$$N_i = N_{iP} + N_{i1} \cdot X_1,$$

где i – номер стержня;

N_i – усилие в i -стержне от внешней нагрузки;

N_{i1} – усилие в i -стержне от единичной силы $X_1 = 1$;

x_1 – действительные усилия, найденные из решения.

Выражение понимаем алгебраически. Усилия в стержне приведены на рис. 7.35. Действительные значения усилий приведены в табл. 7.1.

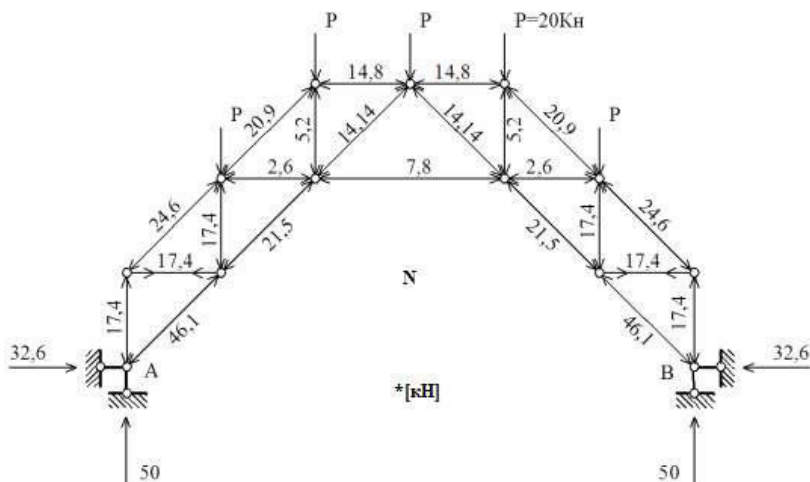


Рис. 7.35

8. Деформационная проверка: для этого необходимо определить относительное перемещение по сечениям в перерезанных стержнях (отброшенных связях). Они должны быть равны нулю. Эти перемещения определяются по формуле интеграла Мора (Верещагина):

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot N_{i1}}{EA_i} l_i \cong 0.$$

В табл. 7.1 приведены данные расчета усилий в стержнях для левой половины фермы (рис. 7.32) в силу симметрии.

Вычисление по этой формуле приведено в табл. 7.1, графа 9.

$$\sum \frac{\bar{N}_i \cdot N \cdot l}{EA_i} = \frac{1}{EA} (-643,7 + 643,6) = 0.$$

9. Проводим статическую проверку расчета.

Она заключается в том, что любые вырезанные из заданной фермы узлы должны находиться в равновесии. Так, например, для узла 5 (рис. 7.36) уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum X = 2,6 + 21,5 \cdot 0,707 - 14,14 \cdot 0,707 - 7,8 = 17,80 - 17,797 = 0;$$

$$\sum Y = 21,5 \cdot 0,707 - 5,2 - 14,14 \cdot 0,707 = 15,20 - 15,197 \approx 0.$$

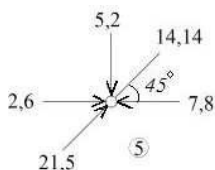


Рис. 7.36

Условия равновесия узла выполняются. Нумерация узлов показана на рис. 7.32.

Аналогично выполняются проверки для других узлов.

Проверка равновесия отсеченной части фермы.

Составляем уравнения в форме суммы проекций всех сил на оси X , Y .

$$\sum X = 32,6 - (21,5 + 20,9) \cdot 0,707 - 2,6 = 32,6 - 32,58 = 0;$$

$$\sum Y = 50 - 20 - (21,5 + 20,9) \cdot 0,707 = 50 - 49,98 = 0.$$

Эта часть также находится в равновесии.

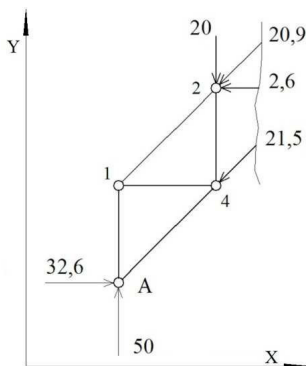


Рис. 7.37

Таким образом, можно заключить, что действительные усилия в стержнях заданной фермы определены правильно.

Таблица 7.1

№ стержней	l (м)	$\overline{N_1}$	N_P (кН)	$\overline{N_1}^2 \cdot l$	$\overline{N_1} \cdot N_P \cdot l$	$\overline{N_1} \cdot x_1$	$N_i =$ $N_{Pi} + N_1 X_1$	Деформа- ционная проверка
							(4) + (7)	$N \cdot \overline{N_1} \cdot l_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
A-1	3,0	1,0	-50	3,0	-150	32,59	-17,4	-52,2
1-2	4,24	1,414	-70,7	8,48	-424	46,08	-24,6	-147,5
2-3	4,24	2,83	-113,1	33,96	-1357	92,22	-20,9	-250,8
3-C	3,0	2,0	-80	12,0	-480	65,17	-14,8	-88,8
A-4	4,24	-1,414	0	8,48	0	-46,08	-46,1	276,4
4-5	4,24	-2,83	70,7	33,96	-848	-92,22	-21,5	258,0
5-C	4,24	0	-14,14	0	0	0	-14,14	0
1-4	3,0	-1,0	50	3,0	-150	-32,59	17,4	-52,2
2-4	3,0	1,0	-50	3,0	-150	32,59	-17,4	-52,2
2-5	3,0	-1,0	30	3,0	-90	-32,59	-2,6	7,8
3-5	3,0	-1,0	60	12,0	-360	-65,17	-5,2	31,2
5-9	6,0	-3,0	90	54	-1620	-97,76	-7,8	140,4

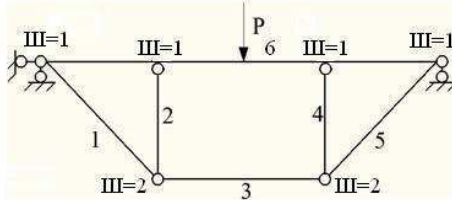
7.6. Расчет статически неопределимых шпренгельных балок

7.6.1. Общие сведения

Шпренгельные балки по своей конструкции различны и могут быть однажды и многократно статически неопределимы. Они представляют системы, состоящие из неразрезных балок и шарнирных надстроек (шпренгелей).

Приведем некоторые схемы шпренгельных балок.

1. Заданная система (рис. 7.38) представляет собой неразрезную балку 6 и надстройку, состоящую из шарнирно-связанных стержней 1-5.



Степень статической неопределимости определяется, как и ранее, по формуле:

$$n = -W.$$

Рис.7.38

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 - 3 = -1,$$

где D – число дисков (стержней),
 Π – число простых одиночных шарниров,
 C_0 – число опорных стержней.

Основная система (рис. 7.39) для такой балки может быть получена путем перерезания стержня 3.

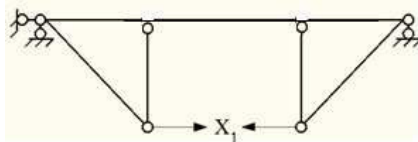


Рис. 7.39

2. Шпренгельная балка (рис. 7.40) также однажды статически неопределима: $n = -(3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 \cdot 3) = 1$.

Число дисков D (стержней) в данной балке равно 6, ломанная балка жесткости 1 образует один диск: $D = 1$.

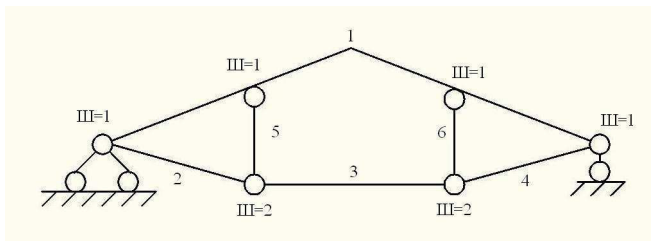


Рис. 7.40

3. На рис. 7.41 представлена мостовая шпренгельная балка. Степень статической неопределимости $n = -(3 \cdot 10 - 2 \cdot 15 - 3) = 3$. В этом примере балка жесткости 1 принята за диск $D = 1$.

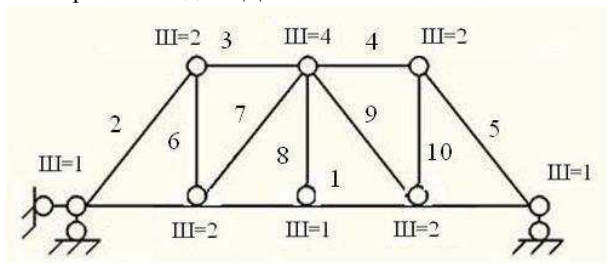


Рис. 7.41

Поясним, что обозначает термин «одиночный шарнир». Число одиночных шарниров определяется по формуле:

$$\Pi = C - 1,$$

где C – число стержней сходящихся в узле.

Например, узел, состоящий из двух стержней (рис. 7.42, а), образует один одиночный шарнир.

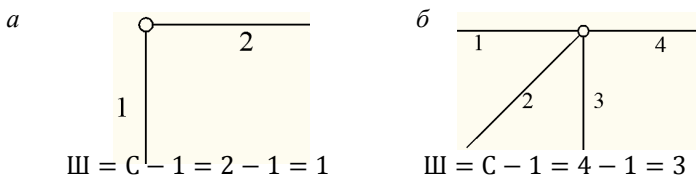


Рис. 7.57

Шарнир, соединяющий четыре стержня, равен трем простым, т. е. на единицу меньше числа стержней узла (рис. 7.42, б).

Следует различать шарниры врезные и примыкающие. Стержни шпренгеля присоединяются к балке жесткости примыкающими шарнирами, а между собой – врезными, образуя ферму.

Степень статической неопределимости шпренгельных балок можно также определять по формуле: $n = 3K - Ш$, где K – количество замкнутых контуров, $Ш$ – количество одиночных шарниров.

Для шпренгельной балки (рис. 7.40) определим $n = 3K - Ш = 3 \cdot 6 - 15 = 3$.

Расчет статически неопределимых шпренгельных балок рационально производить методом сил.

7.6.2. Порядок расчета шпренгельных балок по методу сил

Расчет шпренгельных балок методом сил проводится в том же порядке, что и расчет рам.

1. Устанавливается число лишних неизвестных, то есть определяется степень статической неопределимости n .
2. Выбирают основную систему (отбрасываем лишние или перерезаем связи и таким образом превращаем заданную систему в статически определимую). При этом основная система должна быть статически определимой, геометрически неизменяемой.
3. Основная система загружается внешней нагрузкой и усилиями отброшенных связей, то есть образует эквивалентную систему.
4. Составляем каноническое уравнение метода сил.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2p} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{np} = 0.$$

Эти уравнения выражают требование, чтобы основная система деформировалась под действие внешних нагрузок и сил $X_1, X_2 \dots X_n$ точно так же, как и заданная статически неопределимая система, т. е. перемещения по направлению отброшенных (порезанных) связей должны равняться нулю.

Коэффициенты δ_{ik} уравнений представляют собой перемещения в основной системе от действия единичных сил, приложенных вместо лишних неизвестных.

Особенность определения коэффициентов уравнений шпренгельных балок состоит в том, что в них учитывается влияние продольных сил на величину перемещения.

Например, δ_{ik} представляют собой перемещения точки приложения силы X_i по ее же направлению, но вызванные силой $X_k = 1$.

Δ_{ip} – свободные члены, представляют перемещения в основной системе по направлению i -связи, вызванные внешней нагрузкой.

Коэффициенты определяются по формулам:

$$\text{главные} - \delta_{ii} = \sum_0^{l_i} \frac{\overline{M}_i^2}{E \cdot I_i} \cdot dx + \sum_1^n \frac{\overline{N}_i^2}{E \cdot A_i} \cdot l_i$$

(так как по длине стержней шпренгеля и прямолинейных участков балки продольные силы от $X_n = 1$ постоянны, то во втором слагаемом интеграл заменен суммой);

$$\text{побочные} - \delta_{ik} = \sum_0^{l_i} \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_k}{E \cdot I_i} \cdot dx + \sum \frac{\overline{N}_i \cdot \overline{N}_k}{E \cdot A_i} \cdot l_i;$$

$$\text{грузовые} - \Delta_{ip} = \sum_0^{l_i} \frac{\overline{M}_i \cdot M_p}{E \cdot I_i} \cdot dx + \sum \frac{N_i \cdot N_k}{E \cdot A_i} \cdot l_i.$$

После определения коэффициентов и решения уравнений изгибающие моменты и продольные силы определяются как обычно, по формулам:

$$M_k = M_p^k + \overline{M}_1^k \cdot X_1 + \overline{M}_2^k \cdot X_2 \dots$$

$$N_k = N_p^k + \overline{N}_1^k \cdot X_1 + \dots \overline{N}_n^k \cdot X_n,$$

где k – сечение (стержень), в котором определяется усилие.

5. По эпюре M строится эпюра Q , и выполняется проверка.

Пример 7.2

Рассчитать шпренгельную балку (рис. 7.43, а), если размеры ее элементов и нагрузка известны. При расчете принять, что геометрические характеристики имеют следующие соотношения:

$$\text{для балки: } \frac{I_6}{A_6} = 0,1 \text{ м}^2,$$

где I_6 – момент инерции поперечного сечения балки, A_6 – площадь поперечного сечения балки;

для элементов шпренгеля (стержней):

по внешнему контуру (полигональных элементов: 0-1, 1-3, 3-4):

$$A_{0-1} = A_{1-2} = A_{3-4} = 0,2 \cdot A_6.$$

Для элементов решетки принять:

$$A_p = A_{1-2} = A_{2-3} = 0,1 \cdot A_6.$$

Геометрические параметры системы:

$$l_{01} = l_{13} = \sqrt{(5,4)^2 + (3,6)^2} = 6,49 \text{ м},$$

$$\cos \alpha = \frac{5,4}{6,49} = 0,83,$$

$$\text{длина стержня: } \sin \alpha = \frac{3,6}{6,49} = 0,53,$$

$$l_{1-2} = \sqrt{(3,6)^2 + (3,6)^2} = 5,08 \text{ м},$$

$$\cos \beta = \sin \beta = 0,707.$$

Решение

1. Определяем степень статической неопределимости

$$n = -W = -(3Д - 2Ш - C_0);$$

$$n = -(3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 - 3) = 1.$$

Откуда следует, что заданная система однажды статически неопределима, т. е. имеет одну избыточную связь.

2. Выбираем основную систему. Основная система может быть образована врезанием шарнира в балку (рис. 7.43, б) или разрезанием стержня 1-3 (рис. 7.43, в). Выбираем второй вариант.

3. Загружаем основную систему внешней нагрузкой и усилием отброшенной связи, т. е. образуем эквивалентную систему (рис. 7.43, г).

4. Составляем каноническое уравнение $\delta_{11} \cdot x_1 + \Delta_{1p} = 0$ – оно выражает, что перемещение по направлению отброшенной связи от всех внешних сил и лишней неизвестной равно нулю.

5. Определяем коэффициенты при неизвестных по формулам.

Для рассматриваемого случая имеем:

$$\delta_{11} = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{M}_i^2}{E \cdot I_{\bar{o}}} \cdot dx + \sum_{i=1} \frac{\overline{N}_i^2 \cdot l_i}{E \cdot F_i}.$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{M_p \cdot M_1}{E \cdot I_{\bar{o}}} \cdot dx$$

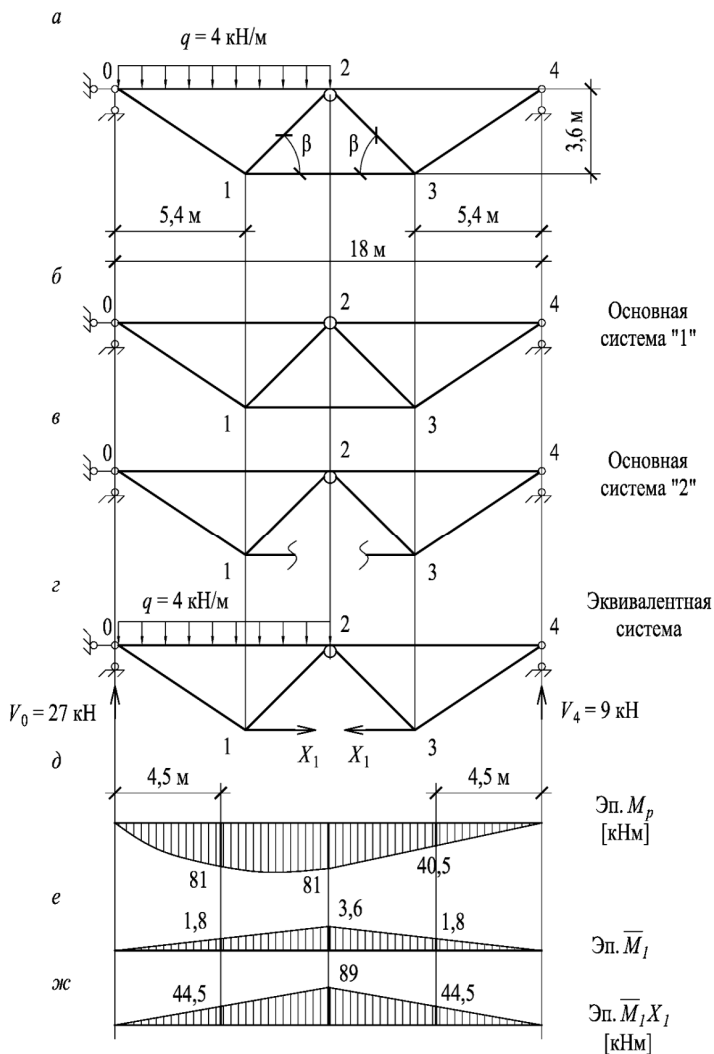


Рис. 7.43 (окончание рисунка на с. 157)

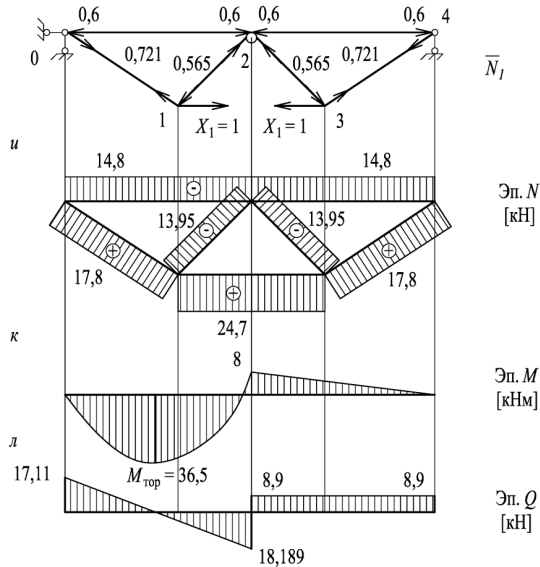


Рис. 7.43

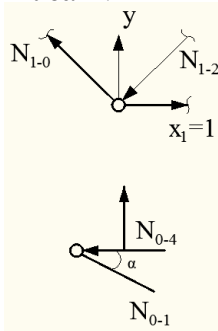
Второй член в Δ_{ip} , учитывающий влияние продольных сил, отсутствует, т. к. усилия N_p во всех стержнях равны нулю.

Примечание: если балка наклонная, то член, содержащий N , присутствует, так как в наклонных участках будут возникать продольные силы (рис. 7.40).

Из формул следует, что для определения коэффициентов необходимо знать усилия в стержнях.

6. Определяем усилия в стержнях шпренгеля от единичного усилия $X_1 = 1$. Для этого загружаем основную систему $X_1 = 1$ и, используя способ вырезания узлов, находим усилия в стержнях. Составляем уравнения равновесия в формуле проекций сил на оси X и Y .

Узел 1:



$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \quad -N_{1-0} \sin \alpha + N_{1-2} \sin \beta = 0, \\ \sum X &= 0; \quad -N_{1-0} \cos \alpha - N_{1-2} \cos \beta + 1 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим усилия:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1-3} &= 1, \\ \bar{N}_{1-0} &= 0,721, \\ \bar{N}_{1-2} &= 0,565, \\ \bar{N}_{0-1} &= 0,721. \end{aligned}$$

$$\sum X = N_{0-1} \cdot \cos \alpha - N_{0-4} = 0; \text{ откуда } N_{0-4} = 0,6 \text{ (сжатие).}$$

Значения найденных усилий приведены в табл. 7.2.

7. Строим эпюру продольных усилий в элементах шпренгеля от единичных сил (рис. 7.43, κ).

8. Строим эпюру « M_i » для балки. Опорные реакции равны нулю.

9. Строим грузовую эпюру « M_p ». Для этого загружаем основную систему внешней нагрузкой. Построение производим, как для обычной балки. Вычисляем коэффициенты δ_k при неизвестных и сводим в таблицу, а также грузовой коэффициент Δ_{ip} .

Таблица 7.2.

Номера стержней	l_i (м)	A_i (м ²)	$\overline{N}l$	$\overline{N}l^2$	$\frac{\overline{N}_i^2 \cdot l_i}{E \cdot A_i}$	$\frac{\overline{N}_i \cdot N \cdot l_i}{E \cdot A_i}$
0-1	6,49	0,2 A_6	0,721	0,519	$16,86 \frac{1}{E \cdot A_6}$	$15,45 \frac{1}{EA_6}$
1-2	5,09	0,1 A_6	-0,565	0,319	$16,25 \frac{1}{E \cdot A_6}$	$400,4 \frac{1}{EA_6}$
1-3	7,2	0,2 A_6	1	1	$36,0 \frac{1}{E \cdot A_6}$	$889,2 \frac{1}{EA_6}$
2-3	5,09	0,1 A_6	-0,565	0,319	$16,25 \frac{1}{E \cdot A_6}$	$404,4 \frac{1}{EA_6}$
3-4	6,49	0,2 A_6	0,721	0,519	$16,86 \frac{1}{E \cdot A_6}$	$416,4 \frac{1}{EA_6}$
4-0	18	A_6	-0,6	0,36	$6,48 \frac{1}{E \cdot A_6}$	$159,8 \frac{1}{EA_6}$

$$\sum 108,7 \frac{1}{EA_6} \quad \sum 2686 \frac{1}{EA_6}$$

$$\delta_{i1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{E \cdot J_6} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3,6 \right) + 108,7 \cdot \frac{1}{E \cdot F_6} = \frac{1}{E \cdot J_6} \cdot \left(77,76 + \frac{108,7 \cdot J_6}{F_6} \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_6} \cdot (77,76 + 10,87) = \frac{88,63}{E \cdot J_6}.$$

$$\delta_{i1} = \frac{88,63}{E \cdot J_6}.$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_p}{E \cdot I_6} \cdot dx = \frac{9}{6 \cdot E \cdot I_6} \cdot (-4 \cdot 81 \cdot 1,8 - 81 \cdot 3,6) + \left(\frac{1}{2} \cdot 81 \cdot 9 \right) \cdot \frac{1}{E \cdot I_6} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 3,6 \right) = -\frac{2187}{E \cdot I_6}.$$

$$\Delta_{ip} = -\frac{2187}{E \cdot I_6}.$$

10. Определяем неизвестное усилие X_1 :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{2187}{88,63} = 24,7 \text{ кН}.$$

$X_1 = -24,7$ кН – действительное усилие в элементе 1-3 шпренгеля.

11. Выполняем построение окончательной эпюры M и N :

$$M_{(k)} = M_p^{(k)} + \overline{M}_1^{(k)} \cdot X_1,$$

$$N_{(k)} = N_p^{(k)} + \overline{N}_1^{(k)} \cdot X_1.$$

Для данной системы, в которой $N_p = 0$, продольные усилия вычисляем по формуле:

$$N = \overline{N}_1 \cdot X_1.$$

Действительная эпюра продольных сил N показана на рис. 7.43, и.

12. Строим эпюру поперечных сил Q методом вырезания стержней по эпюре M . Так же, как в неразрезных статически неопределимых балках (рис. 7.43, к).

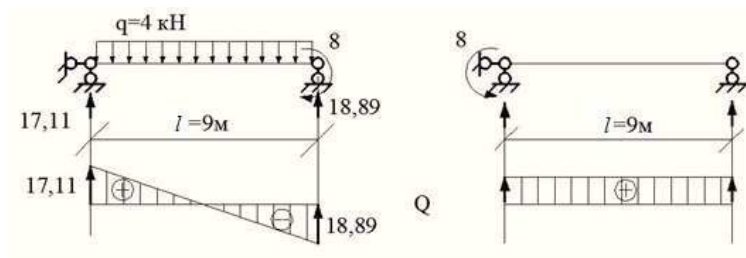


Рис. 7.44

13. Выполняем деформационную проверку.

$$\sum_0^l \frac{M \cdot M_1}{E \cdot I_0} \cdot dx + \sum \frac{N \cdot N_i}{E \cdot F_i} \cdot l_i = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \cdot M_1}{E \cdot I_0} \cdot dx + \sum \int \frac{N \cdot N_i}{E \cdot F_i} \cdot l_i &= \frac{9}{6 \cdot E \cdot I_0} \cdot (-4 \cdot 36,5 \cdot 1,8 + 8 \cdot 3,6) + \frac{8 \cdot 9}{2 \cdot E \cdot I_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 + \frac{268,3}{E \cdot I_0} = \\ &= -\frac{394,2}{E \cdot I_0} + \frac{129,6}{E \cdot I_0} + \frac{268,6}{E \cdot I_0} = -\frac{394,2}{E \cdot I_0} + -\frac{398,2}{E \cdot I_0}. \end{aligned}$$

Погрешность расчета составляет около 1 %, что вполне допустимо.

14. Статическая проверка.

Для проверки можно вырезать узел или часть балки, они должны находиться в равновесии.

Рассмотрим равновесие части шпренгельной балки, расположенной выше сечения (рис. 7.45).

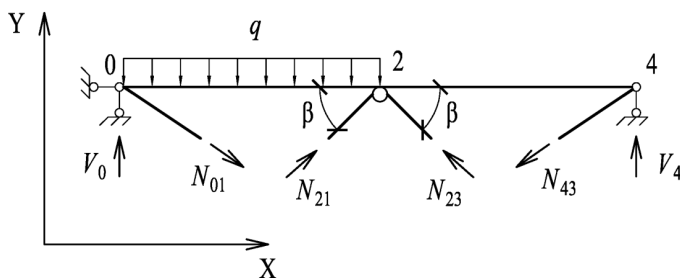


Рис. 7.45

$$\sum Y = V_0 - N_{01} \sin \alpha + N_{21} \sin \beta + N_{23} \sin \beta - N_{43} \sin \alpha + V_0 + V_4 - q \cdot 9 =$$

$$= 27 - 17,8 \cdot 0,53 + 13,95 \cdot 0,707 - 17,8 \cdot 0,53 + 9 - 36 = 55,72 - 54,86 = 0,86 .$$

Погрешность составляет 0,86, что допустимо.

7.7. Некоторые варианты выбора рациональной основной системы метода сил при расчете рам

1. Рационально «резать» по шарниру (удалить шарнир) в замкнутом контуре. Разрез шарнира равносител удалению 2-х связей. Так, при расчете дважды статически неопределимой рамы (рис. 7.46, а) основную систему рационально выбрать, разрезая ее по шарниру 4. Основная система метода сил (ОСМС) показана на рис. 7.46, б. Эквивалентная схема показана на рис. 7.46, в.

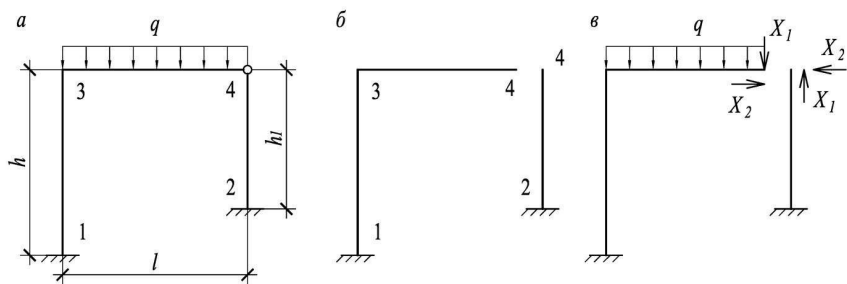


Рис. 7.46

Основная система представляет собой раму с заделкой 1-3-4 и отдельно стоящую стойку 2-4, которые работают независимо друг от друга. В выбранной основной системе эпюры изгибающих моментов строятся просто – без определения реакций опор. Эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 7.47.

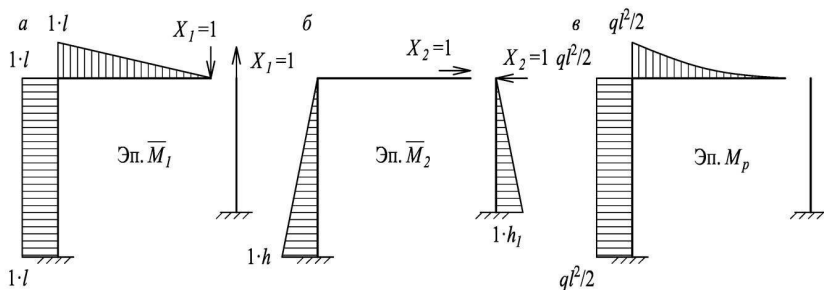


Рис. 7.47

2. При выборе основной системы необходимо помнить, что она должна быть геометрически неизменяемой. Так, например, нельзя резать по шарниру (рис. 7.48, а), т.к. основная система при этом (рис. 7.48, б) получается геометрически изменяемой: стойка 4-2 не может сохранять равновесие и воспринимать нагрузки при одной шарнирной опоре 2. Изменяемые системы не могут быть приняты в качестве основных при расчете по методу сил.

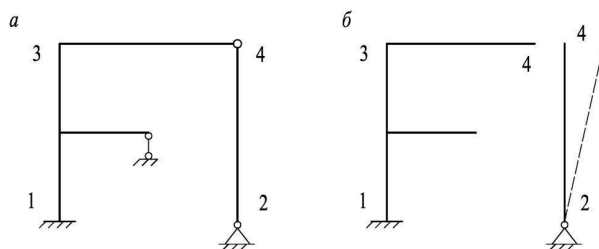


Рис. 7.48

3. Рационально при получении ОСМС удалить из заданной системы (рис. 7.49, а) затяжку 3-4 – стержень между двумя шарнирами, в котором возникает только продольная сила N . На рис. 7.49, а показана однажды статически неопределимая рама ($n=1$) с затяжкой (3-4), а на рис. 7.49, б показана ОСМС, полученная удалением затяжки (3-4). Эквивалентная система представлена на рис. 7.49, в.

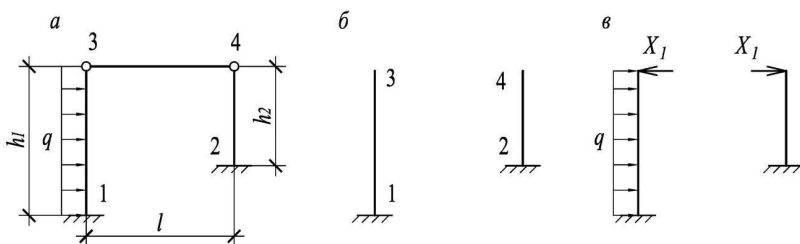


Рис. 7.49

Основная система представляет собой две независимые стойки 1-3 и 2-4. Характер эпюры изгибающих моментов от $X_1=1$ приведен на рис. 7.50, а, а от внешней нагрузки на эпюру M_P (рис. 7.50, б).

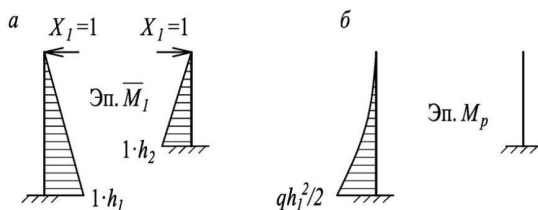


Рис. 7.50

4. В некоторых случаях возможно получение основной системы «врезанием» шарнира в жесткий узел рамы. Введение шарнира соответствует удалению одной связи. На рис. 7.51, а приведена заданная рама ($n=1$), на рис. 7.51, б – основная система. Основная система представляет собой 3-х шарнирную раму. Эквивалентная система показана на рис. 7.51, в. За неизвестное X_1 принят изгибающий момент в жестком узле 5.

Пример 7.3

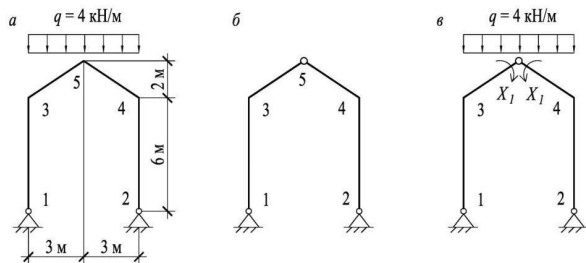


Рис. 7.51

3-х шарнирная рама рассчитывается по известной методике [1,6,15,16]. На рис. 7.52, а приведена эпюра \bar{M}_1 , а на рис. 7.52, б – эпюра M_p . Для наглядности размеры рамы и нагрузки взяты в числах.

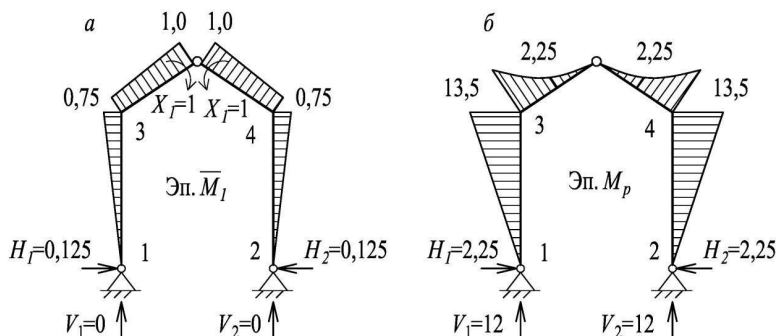


Рис. 7.52

В единичном состоянии рама нагружена только моментом $X_1=1$.

Поясним построение эпюры \bar{M}_1 , для ее построения необходимо определить реакции опор. Из равновесия рамы в целом и уравнения равновесия $\sum M_1=0$ имеем:

$$V_2 \cdot 6 - X_1 + X_1 = 0; \quad V_2 = 0.$$

Аналогично - $V_1 = 0$.

Из условия равновесия левой части рамы (рис.7.52, а):

$$\sum M_5^{\text{лев.сил}} = 0: \quad H_1 \cdot 8 - 1 = 0; \quad H_1 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ордината в сечении 3 на эпюре \bar{M}_1 :

$$M_{31} = H_1 \cdot 6 = 0,125 \cdot 6 = 0,75.$$

При нагружении основной системы заданной нагрузкой $q = 4$ кН/м с учетом симметрии получаем:

$$V_1 = V_2 = 4 \cdot \frac{6}{2} = 12 \text{ кН}.$$

Из условия равновесия левой части рамы 1-3-5:

$$\sum M_5^{\text{лев.сил}} = 0: \quad -V_1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + H_1 \cdot 8 = 0,$$

Откуда $H_1 = 2,25$ кН.

С учетом полученных реакций опор вычисляем изгибающие моменты в характерных сечениях рамы.

В сечении 3 стойки 1-3:

$$M_{31} = H_1 \cdot 6 = 2,25 \cdot 6 = 13,5 \text{ кНм.}$$

Посередине наклонного ригеля изгибающий момент определяем следующим образом:

$$V_1 \cdot 1,5 - H_1(6 + 1) - q \cdot \frac{1,5^2}{2} = 12 \cdot 1,5 - 2,25 \cdot 7 - 4 \cdot \frac{2,25}{2} = -2,25 \text{ кНм.}$$

(знаки изгибающих моментов взяты как в балке).

В рассматриваемой раме возможен и другой вариант основной системы. Например, преобразуем правую опору в шарнирно-подвижную и рама превращается в раму на двух опорах ($n = 0$). На рис. 7.53, *а* показана основная система, на рис. 7.53, *б* – эквивалентная система. За неизвестное X_1 в этом варианте ОС принята горизонтальная составляющая реакции опоры 2: $H_2 = X_1$.

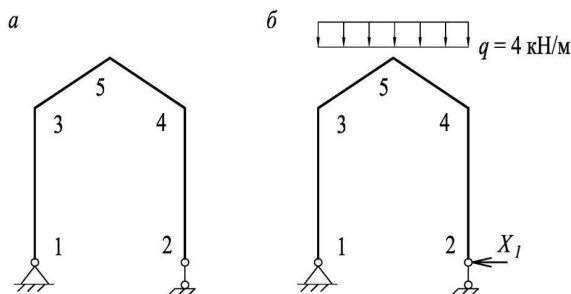


Рис. 7.53

Далее рассмотрим несколько примеров более сложных рам, в которых ОСМС получена с использованием рассмотренных приемов. Для лучшего понимания размеры рам взяты в числах.

Пример 7.4. Для заданной рамы построить единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов.

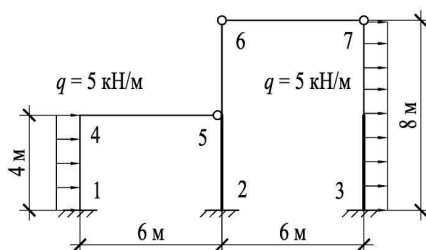


Рис. 7.54

Степень статической неопределимости $n=3K-Ш=3 \cdot 2 - 3 = 3$, и для получения ОСМС необходимо отбросить три связи: «разрежем» по примыкающему шарниру 5 и «отбросим» затяжку 6-7. ОСМС представляет собой Г-образную раму 1-4-5 и две независимые стойки 2-6 и 3-7 (рис. 7.55, а). Эквивалентная система показана на рис. 7.55, б.

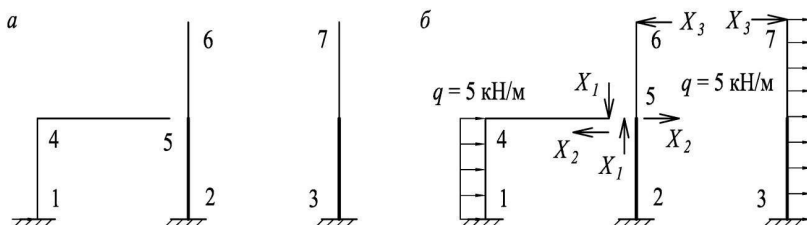


Рис. 7.55

Эпюры моментов для принятой основной системы можно строить без определения реакций опор, двигаясь со стороны свободных концов. Напоминаем, что эпюры не зависят от жесткостей стержней, т.к. момент – это произведение силы на плечо. Все эпюры представлены на рис. 7.56, а-г.

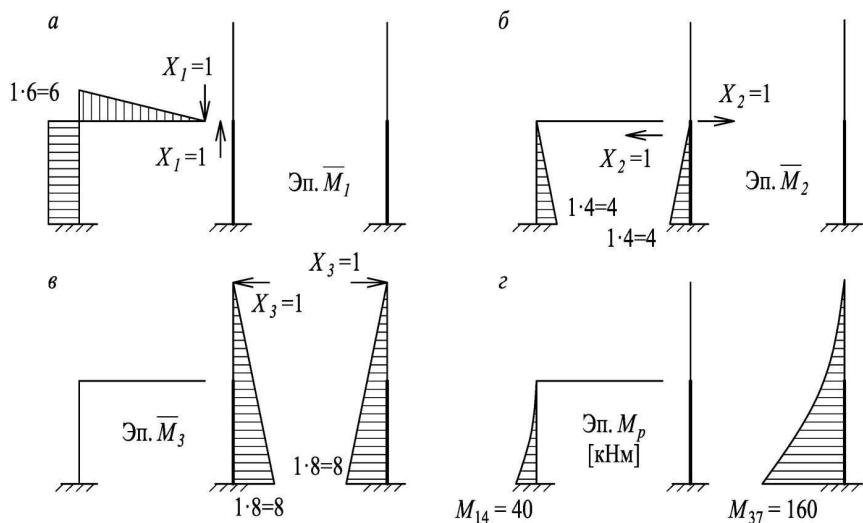


Рис. 7.56

Поясним вычисление ординаты на грузовой эпюре M_p :

$$M_{14} = q \cdot \frac{l^2}{2} = 5 \cdot \frac{4^2}{2} = 40 \text{ кНм};$$

$$M_{37} = q \cdot \frac{l^2}{2} = 5 \cdot \frac{8^2}{2} = 160 \text{ кНм}.$$

Пример 7.5. Для заданной рамы построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов (рис. 7.57).

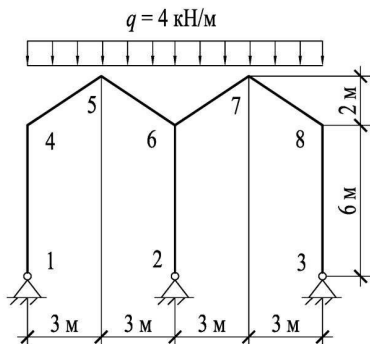


Рис. 7.57

Степень статической неопределимости $n=3K-III=3 \cdot 2-3=3$.

Основную систему получим одним из приемов, рассмотренных выше – врезанием шарнира в узел 5, примыкающего шарнира в узел 6 и преобразованием опоры 3. Этот вариант ОСМС изображен на рис. 7.58, а и представляет собой 3-х шарнирную раму 1-4-5-6-2 и второстепенную – 6-7-8-3. Возможен второй вариант ОСМС, который получается введением 3-х шарниров в жесткие узлы 5, 7 и примыкающего – в узел 6 (рис. 7.58, б).

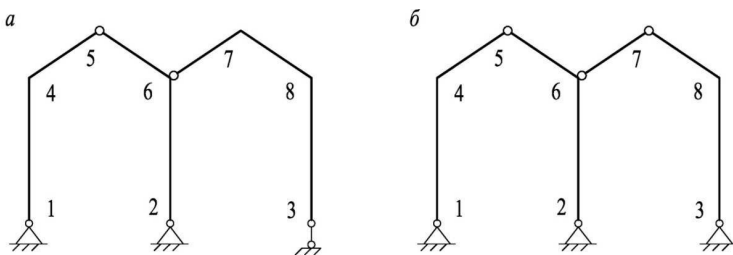


Рис. 7.58

Эпюры изгибающих моментов изображены на рис. 7.59, а-г применительно к первому варианту ОСМС.

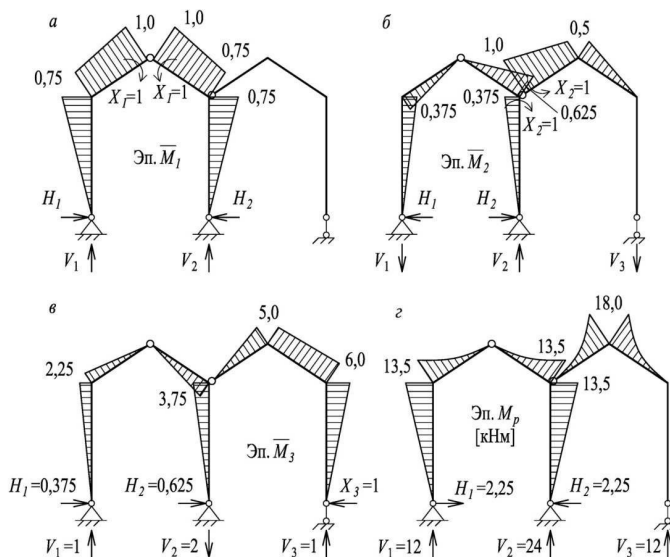


Рис. 7.59

Поясним некоторые эпюры.

При нагружении основной системы неизвестным $X_1=1$ эпюры возникают только на главной раме, т.к. второстепенная рама 6-7-8-3 не загружена и не передает реакций на главную раму. Эпюра \bar{M}_1 взята из рис. 7.52, а, где рама имеет те же размеры и нагрузку, что и в рассматриваемом примере.

Поясним построение эпюры \bar{M}_2 : вначале рассматриваем равновесие второстепенной рамы 6-7-8-3 как самостоятельной (рис. 7.60, а). Из уравнения $\sum M_6=0$ имеем:

$$-V_3 \cdot 6 + 1 = 0; \quad V_3 = \frac{1}{6}; \quad V_6 = -V_3 = -\frac{1}{6}.$$

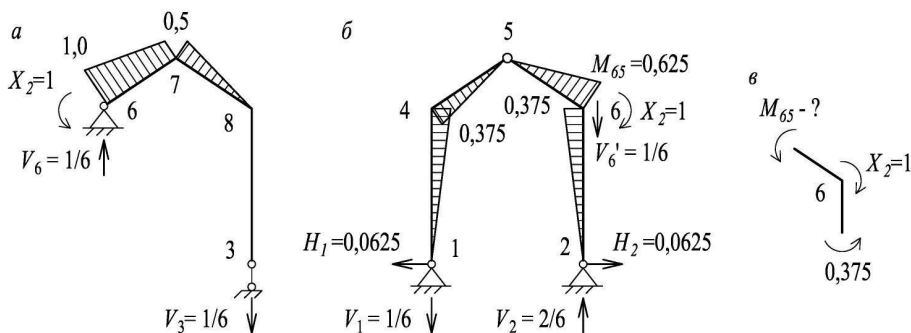


Рис. 7.60

Далее рассматриваем равновесие главной рамы 1-4-5-6-2 под действием $X_2=1$ и $V_6=1/6$. Определяем реакции опор (рис. 7.60, б).

$$\sum M_2 = 0: \quad V_1 \cdot 6 - X_2 = 0; \quad V_1 = \frac{1}{6}.$$

$$\sum M_1 = 0: \quad V_2 \cdot 6 - X_2 - V_6' \cdot 6 = 0; \quad V_2 = \frac{2}{6}.$$

Горизонтальную реакцию H_1 определяем из равновесия левой части рамы и уравнения $\sum M_5^{\text{лев. сил}} = 0$:

$$V_1 \cdot 3 - H_1 \cdot 8 = 0;$$

$$3 \cdot \frac{1}{6} - H_1 \cdot 8 = 0; \quad H_1 = 0,0625.$$

Из уравнения равновесия $\sum M_5^{\text{прав. сил}} = 0$ получаем:

$$H_2 \cdot 8 - V'_6 \cdot 3 - X_2 + V_2 \cdot 3 = 0.$$

$$H_2 \cdot 8 - \frac{1}{6} \cdot 3 - 1 + \frac{2}{6} \cdot 3 = 0; \quad H_2 = 0,0625.$$

Проверка: $\sum X = 0$; $-H_1 + H_2 = 0$.

Поясним ординаты эпюр на главной раме: $M_{41} = H_1 \cdot 6 = 0,0625 \cdot 6 = 0,375$; M_{65} определяется из равновесия узла 6 (рис. 7.60, в):

$$M_{65} - 1 + 0,375 = 0, \quad M_{65} = 0,625.$$

Для рамы в целом эпюра \bar{M}_2 показана на рис. 7.59, б.

Аналогичным образом построены эпюры \bar{M}_3 и M_P .

Пример 7.6. Построить единичные и грузовую эпюры (характер эпюр) от ветровой нагрузки q для расчетной схемы цеховой рамы (рис. 7.61).

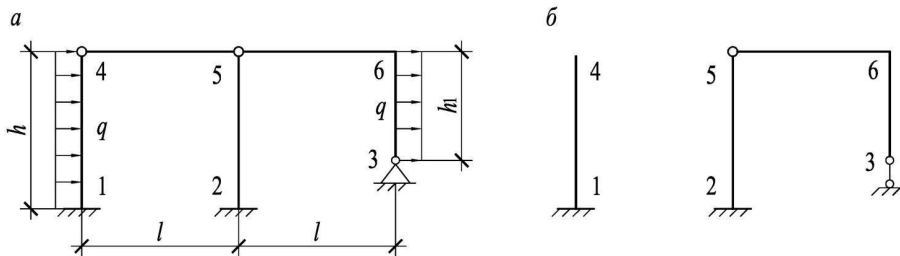


Рис. 7.61

Степень статической неопределимости $n = 3K - Ш = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Обращаем внимание, что в узле 5 – двойной шарнир и он равен двум простым.

Для получения ОСМС воспользуемся одним из рациональных способов получения основной системы – удалим затяжку 4-5. Далее преобразуем опору 3 в шарнирно – подвижную, ОСМС показана на рис 7.61, б, она представляет собой независимую стойку 1-4 и стойку 2-5 с второстепенной рамой 5-6-3. Эквивалентная система и характер эпюр показаны на рис. 7.62, а-г.

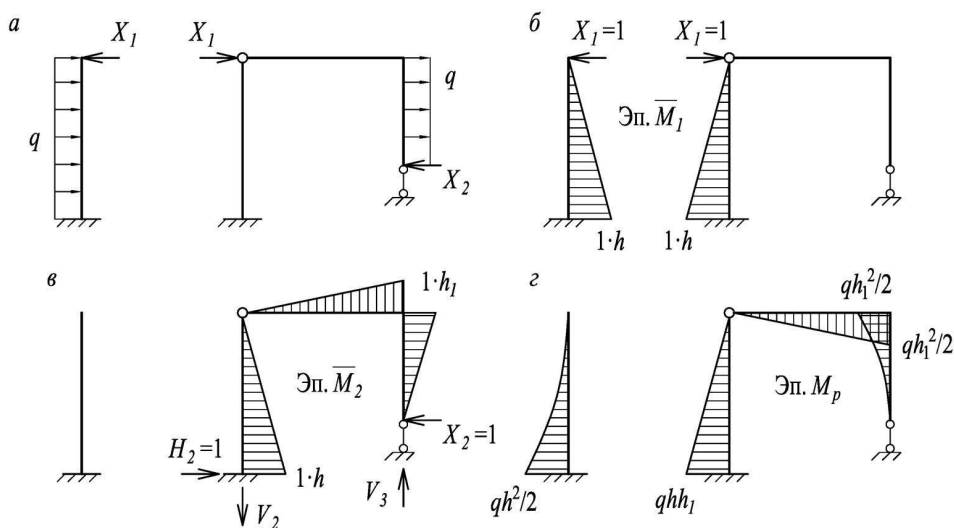


Рис. 7.62

Поясним некоторые эпюры. При построении эпюры \bar{M}_2 вначале рассматриваем равновесие второстепенной рамы 5-6-3 и определяем реакции, которые она передает на главную часть 5-2 (рис. 7.63, а, б). По аналогии построена эпюра M_p .

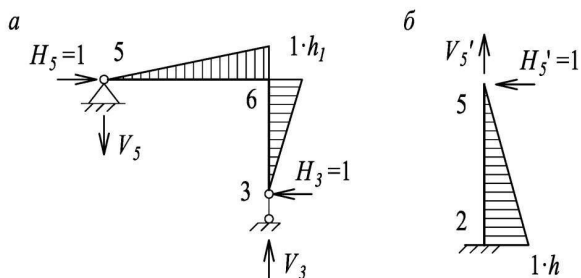


Рис. 7.63

Пример 7.7. Для заданной расчетной схемы цеховой рамы (рама промышленного здания) построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных сил Q и продольных сил N от действия постоянной вертикальной нагрузки P (рис. 7.64).

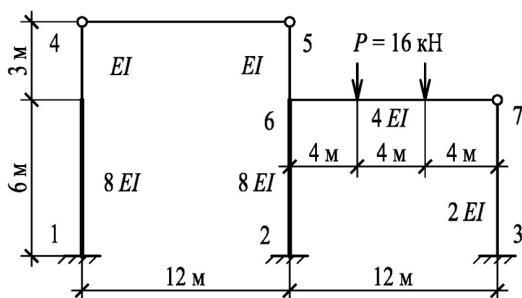


Рис.7.64

Решение:

1. Определение степени статической неопределимости. Используем формулу $n = 3K - \Pi = 3 \cdot 2 - 3 = 3$. Рама имеет три лишних связи.

2. Выбор основной системы метода сил.

Основная система получается удалением лишних связей, т.к. $n = 3$, необходимо удалить три связи. В данном примере при получении основной системы использован один из рациональных путей – удаление так называемой затяжки 4-5 (стержень, в котором возникает только одно внутреннее усилие $X_1 = N$ – продольная сила). Также «врезаны» два шарнира: примыкающий к стойке 2-5 в узле 6 и в опоре 3. Основная система показана на рис.7.65.

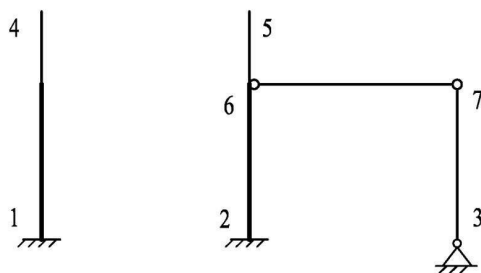


Рис.7.65

Основная система представляет собой две стойки 1-4 и 2-5, к стойке 2-5 примыкает трехшарнирная рама 6-7-3, которая не может существовать самостоятельно и является второстепенной по отношению к главной части 5-2. Рассматриваемая система (рис.7.65) статически определима ($n = 0$) и

геометрически неизменяема. На рис.7.66 показана эквивалентная система, на которой обозначены неизвестные усилия X_1, X_2, X_3 и заданная нагрузка P .

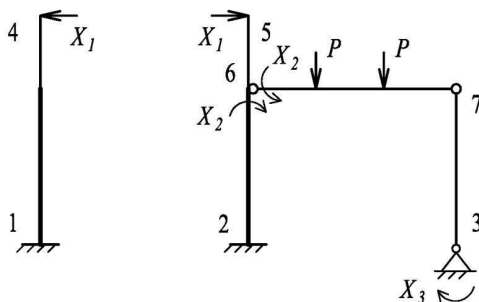


Рис.7.66

3. Канонические уравнения метода сил при $n = 3$ имеют вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

4. Определение коэффициентов канонических уравнений.

Для определения коэффициентов δ_{ik} и Δ_{ip} необходимо вначале построить эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i от единичных усилий и грузовую эпюру M_p от внешней нагрузки (рис.7.67).

Следует отметить, что единичные эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ рационально строить на тех же схемах, на которых показаны единичные нагрузки. Нагружение основной системы заданной нагрузкой показано на рис.7.68,а, а грузовая эпюра M_p построена на другой схеме (рис.7.68,б). Все представленные на рис.7.67, 7.68 эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i и M_p построены со стороны растянутых волокон.

Поясним построение эпюры \bar{M}_3 (рис.7.67, в). В этом состоянии основная система (рис.7.67, в) загружена единичным моментом $X_3 = 1$, приложенным в опоре 3. Второстепенная трехшарнирная рама 6-7-3 передает свое реактивное усилие H_6 на главную часть 5-6-2 (рис.7.69, а). Реакцию H_6 определяем из равновесия трехшарнирной рамы 6-7-3 как самостоятельной (рис.7.69, б).

Из уравнения равновесия в форме моментов относительно точки 7 (рис.7.69, б) для ригеля 6-7 следует, что реакция $V_6 = 0$, а, следовательно, и реакция $V_3 = 0$. Из уравнения равновесия в форме моментов относительно точки 7 для стойки 3-7 трехшарнирной рамы имеем: $\Sigma M_7 = 0$; $-X_3 + H_3 \cdot 6 = 0$, отсюда:

$$H_3 = H_6 = 1/6.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона реакция $H_6 = 1/6$ передается на главную часть (стойка 2-6) с обратным знаком (рис.7.69, а), вследствие чего на стойке в заделке 2 возникает изгибающий момент $H_6' \cdot 6 = 1/6 \cdot 6 = 1$ (рис.7.67, в).

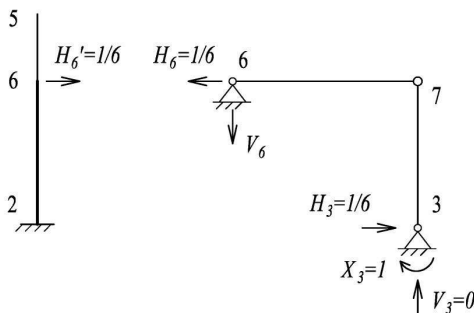


Рис.7.69

По аналогии построена эпюра \bar{M}_1 . При нагружении основной системы силами $X_1 = 1$, второстепенная рама 6-7-3 не работает.

Коэффициенты канонических уравнений определяем посредством интеграла Мора и способа Верещагина (см. выше) путем «перемножения» эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ и M_p . Заметим, что при вычислении коэффициентов ниже используем формулы Симпсона и Верещагина.

Единичные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{8EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot 2 \cdot (3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 9 \cdot 9) = \\ &= \frac{76,5}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} = \delta_{21} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{8EI} \cdot \frac{3+9}{2} \cdot 6 \cdot 1 = \frac{4,5}{EI}; \\ \delta_{13} = \delta_{31} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{1}{8EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (4 \cdot 6 \cdot 0,5 + 1 \cdot 9) = \frac{2,625}{EI}; \\ \delta_{22} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx = \frac{1}{8EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1,75}{EI}; \\ \delta_{23} = \delta_{32} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{1}{8EI} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot 1 = \frac{0,375}{EI}; \\ \delta_{33} &= \sum \int \frac{\bar{M}_3^2}{EI} dx = \frac{1}{8EI} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1,25}{EI}.\end{aligned}$$

Грузовые коэффициенты Δ_{ip} :

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dx = 0;$$

При вычислении Δ_{2p} приходится «перемножать» эпюры тремя участками:

$$\begin{aligned}\Delta_{2p} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI} dx = -\frac{1}{4EI} \left[\frac{4}{6} \left(4 \cdot \frac{5}{6} \cdot 32 + 64 \cdot \frac{2}{3} \right) + 64 \cdot 4 \cdot 0,5 + \frac{4}{6} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 64 \right] \\ &= -\frac{64}{EI};\end{aligned}$$

$$\Delta_{3p} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 M_p}{EI} dx = 0.$$

5. Решение системы канонических уравнений. После подстановки найденных коэффициентов канонические уравнения имеют вид:

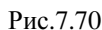
$$\begin{aligned}76,5X_1 + 4,5X_2 + 2,625X_3 + 0 &= 0; \\ 4,5X_1 + 1,75X_2 + 0,375X_3 - 64 &= 0; \\ 2,625X_1 + 0,375X_2 + 1,25X_3 + 0 &= 0.\end{aligned}$$

Производим решение системы уравнений любым из известных методов или посредством ЭВМ получаем: $X_1 = -2,32$ кН, $X_2 = 44,34$ кНм, $X_3 = -8,43$ кНм.

Знаки минус в X_1 и в X_3 говорит о том, что эти усилия направлены в противоположные стороны, чем приняты при построении единичных эпюр.

6. Построение действительной эпюры изгибающих моментов. Вычисление моментов в характерных сечениях проводим по формуле:

Эпюра действительных изгибающих моментов M приведена на рис.7.70. Следует пояснить, что ордината 4,95 на участке 6-7 получена как средняя линия «перекрученной» трапеции: $(44,34 - 34,44)/2 = 4,95$.



Для полной проверки правильности эпюры изгибающих моментов M необходимо «перемножить» эпюру M (рис.7.70) с каждой из единичных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$. Если такое «перемножение» дает результат тождественно равный нулю, то эпюра M построена правильно. Проверку эпюры M можно выполнить и таким образом: построить суммарную эпюру \bar{M}_s путем сложения единичных эпюр $\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$ и «перемножить» \bar{M}_s (рис.7.71) с эпюрой M .

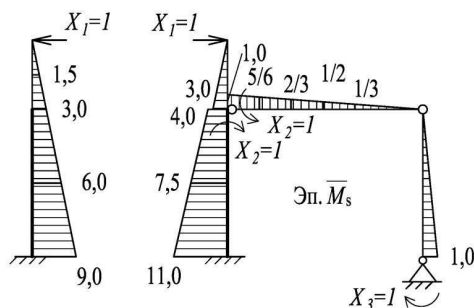


Рис.7.71

Результат «перемножения» эпюр по формулам Верещагина, Симпсона, «трапеций»:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \bar{M}_s}{EI} dx = & -\frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6,96 \cdot 2 - \frac{1}{8EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (6,96 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 13,92 + \\ & + 20,88 \cdot 9) + \frac{1}{8EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (37,38 \cdot 4 + 4 \cdot 26,21 \cdot 7,5 + 15,04 \cdot 11) + \frac{1}{4EI} \left[\frac{4}{6} (44,34 \cdot 1 \right. \\ & + 4 \cdot 0,833 \cdot 4,95 - 34,44 \cdot 0,667) + \frac{4}{6} (-0,667 \cdot 34,44 - 4 \cdot 0,5 \cdot 41,83 - 49,22 \times \\ & \times 0,333) - \frac{4}{6} \cdot 2 \cdot 0,333 \cdot 49,22] - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{8,43}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{EI} (-28,08 + 28,29) = \\ & = -\frac{0,2}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Расхождение невелико, составляет менее 1%.

Примечание:

При «перемножении» двух участков на стержне 6-7 использована формула Симпсона, а на третьем - формула Верещагина.

8. Построение эпюры поперечных сил Q методом вырезания стержней.

Для построения эпюры Q вырезаем из заданной системы участки сечениями, бесконечно близкими к узлам, и рассматриваем их как шарнирно опертые статически определимые балки. По концам балок прикладываем моменты, взятые в соответствующих сечениях из эпюры M , причем эти моменты являются внешними по отношению к балкам. К полученным балкам

также прикладываем внешние нагрузки, если они действуют на рассматриваемые участки.

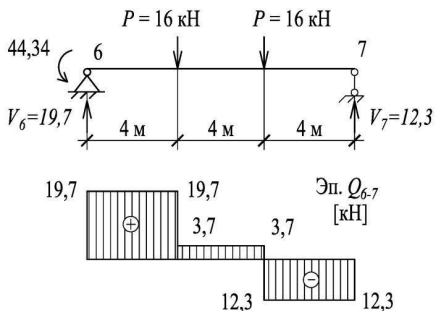


Рис.7.72

Далее решаем задачу как обычно. Рассмотрим стержень 6-7 (рис.7.72).

Определяем реакции опор. Уравнение равновесия в форме моментов относительно точки 6.

$$\sum M_6 = 0; 44,34 + V_7 \cdot 12,0 - 16 \cdot 4 - 16 \cdot 8 = 0,$$

откуда $V_7 = 12,3$ кН.

Аналогично определяем $V_6 = 19,7$ кН. Необходима проверка правильности определения реакций опор из уравнения $\sum Y = 0$:

$$V_6 + V_7 - 2 \cdot 16 = 19,7 + 12,3 - 32 = 32 - 32 = 0.$$

Аналогично строится эпюра Q для остальных стержней, а затем переносится на раму.

Построенная эпюра Q приведена на рис.7.73.

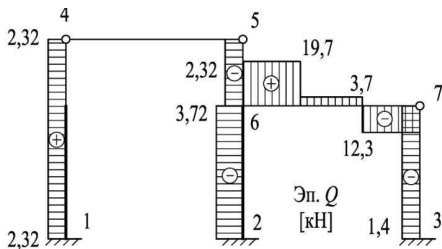


Рис.7.73

9. Построение эпюры продольных сил N.

Эпюру N строим по эпюре поперечных сил Q методом вырезания узлов, как описано ниже.

а) Бесконечно близкими к узлу сечениями вырезаем узлы, прикладываем внешние силы, если они есть, поперечные силы, значение которых берем в соответствующих сечениях из эпюры Q , а также продольные силы, которые пока неизвестны. Из равновесия узла находим неизвестные продольные силы (рис.7.74).

Уравнения равновесия узла 6 имеют вид:

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0; & +N_{62} - 19,7 &= 0; & N_{62} &= 19,7 \text{ кН (сжатие);} \\ \sum X &= 0; & -N_{67} - 2,32 + 3,72 &= 0; & N_{67} &= 1,4 \text{ кН (сжатие).}\end{aligned}$$

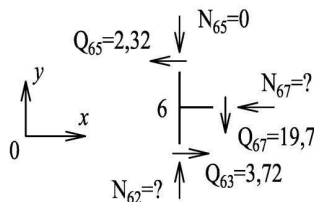


Рис.7.74

Необходимо напомнить, что продольная сила является сжимающей, если истинное направление её к узлу, знак отрицателен; если от узла - положителен (сила растягивающая).

Правило знаков для поперечных сил при вырезании узла такое же, как и при построении эпюры для статически определимых рам: вектор положительной поперечной силы вращает оставшуюся часть стержня относительно узла по часовой стрелке, а вектор отрицательной поперечной силы – против часовой стрелки. Аналогично рассмотрено равновесие узлов 4, 5, 7. Эпюра продольных сил приведена на рис.7.75.

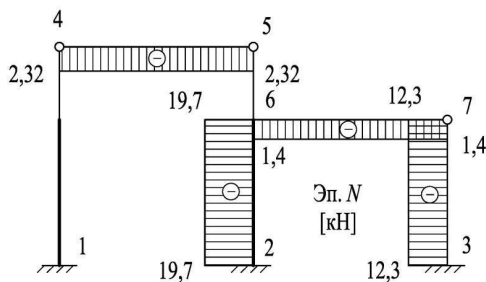


Рис.7.75

10. Статическая проверка расчета.

Расчет считается правильным, если любая часть рамы и в целом сама рама под действием внешних и внутренних усилий находятся в равновесии. Рассмотрим проверку для всей рамы (рис.7.76).

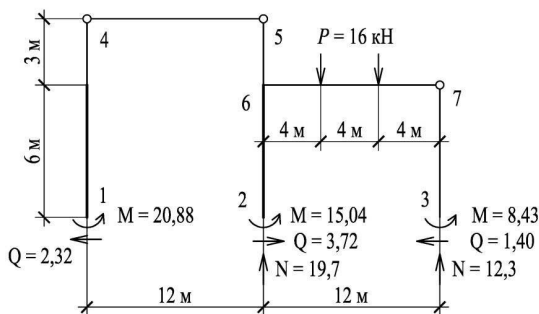


Рис.7.76

Условия равновесия рамы (рис.7.76) имеют вид:

$$\sum x = 3,72 - 2,32 - 1,4 = 3,72 - 3,72 = 0;$$

$$\sum y = -16 - 16 + 19,7 + 12,3 = -32 + 32 = 0.$$

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= -16 \cdot 16 - 16 \cdot 20 + 19,7 \cdot 12 + 12,3 \cdot 24 + 20,88 + 15,04 + 8,43 = \\ &= -576 + 575,94 \approx 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условия равновесия выполняются.

Примечание: возможны расхождения, но они не должны превышать $\pm 5 \%$.

8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (МП)

8.1. Основные понятия

Расчет рам в ряде случаев упрощается, если за неизвестные принимать не силы, как в методе сил, а перемещения узлов рамы. Этот метод расчета называется методом перемещений (МП). Перемещения узлов в рамных конструкциях могут быть линейные и угловые. Так в раме на рис. 8.1, вследствие деформации под действием нагрузок (не показаны), возникают угловые и линейные перемещения. Здесь через Δ обозначены линейные перемещения узлов, φ – угловые перемещения в среднем узле рамы. Надо иметь в виду, что в жестких узлах все стержни, сходящиеся в узле, поворачиваются на один и тот же угол. При этом в каждом узле углы поворота имеют свои значения, за исключением симметричных систем, где в симметричных узлах перемещения и углы поворота одинаковы.

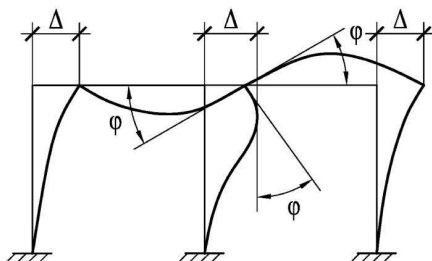


Рис. 8.1

8.1.1. Определение степени кинематической неопределимости

При расчете рам методом перемещений вводят следующие упрощения:

1. Продольные деформации стержней, вызванные продольными силами, не учитывают. Учет продольных деформаций производится только от действия температур;
2. Сдвиговыми деформациями, вызванными действием поперечных сил, пренебрегают;
3. Не учитывают сближение концов стержней рамы вследствие изгиба.

Перемещения узлов в рамах бывают двух типов – линейные и угловые, поэтому общее число неизвестных перемещений K состоит из двух частей: $K = K_1 + K_2$, где K_1 – количество жестких бесшарнирных внеопорных узлов рамы; K_2 – число независимых линейных смещений узлов. В дальнейшем под K будем

понимать степень кинематической неопределимости системы или число неизвестных перемещений по методу перемещений.

В отношении линейных перемещений рама подобна шарнирно-стержневой системе, поэтому для упрощения при определении K_2 заданная система (рис. 8.2, *а*, 8.3, *а*) превращается в шарнирно-стержневую систему. Для этого вводятся шарниры во все жесткие и опорные узлы рамы, если в них заделки. После этого K_2 определяется как степень свободы полученной системы (на рис. 8.2, *б*, 8.3, *б*):

$$K_2 = 2y - C,$$

где u – количество узлов, а C – количество стержней, включая опорные. При этом консоль не учитывается в качестве стержня. Для рамы (рис. 8.2, а) степень кинематической неопределенности: $K = K_1 + K_2 = 3 + 1 = 4$.

Здесь число жестких внеопорных узлов $K_1 = 3$, а число линейных перемещений K_2 определяем после замены заданной системы (рис. 8.2, а) шарнирно-стержневой путем введения шарниров во все узлы (рис. 8.2, б):

$$K_2 = 2y - C = 2 \cdot 6 - 11 = 1.$$

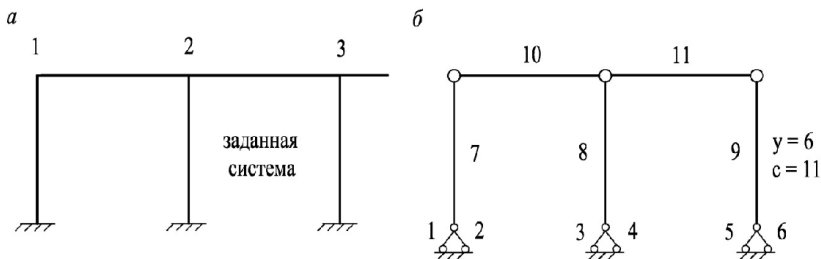


Рис. 8.2

Для сравнения метода перемещений с методом сил определим n – степень статической неопределимости: $n = 3k - \text{III} = 3 \cdot 2 - 0 = 6$, где k - количество замкнутых контуров. В данном примере метод перемещений рационален.

Для рамы, представленной на рис. 8.3, *а*, внеопорный узел не имеет линейного перемещения, поскольку продольные деформации в стержнях не учитываются (допущение 1), поэтому $K_2 = 0$.

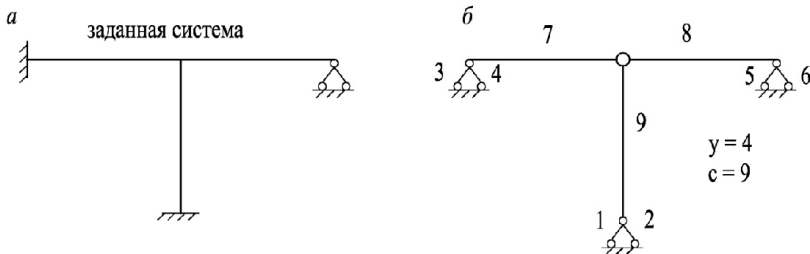


Рис. 8.3

При вычислении K_2 по формуле для системы рис. 8.3, б получаем:

$$K_2 = 2y - C = 2 \cdot 4 - 9 = -1.$$

Если при пользовании формулой $K_2 = 2y - C$ K_2 получается со знаком минус, то принимается $K_2 = 0$.

Рамы, у которых отсутствует линейная подвижность узлов ($K_2 = 0$), называются рамами с линейно-неподвижными узлами (рис. 8.3, а), а рамы, у которых $K_2 \neq 0$, – рамами с линейно-подвижными узлами. В частном случае может быть $K_1 = 0$ (нет жестких узлов, рис. 8.4), $K_2 = 1$.



Рис. 8.4

8.1.2. Основная система метода перемещений (ОСМП) и канонические уравнения

В отличие от метода сил, в котором основная система образуется путем удаления лишних связей, в методе перемещений основная система получается введением связей двух типов: защемлений и линейных связей – стерженьков.

Защемления [штриховка] вводятся в жесткие узлы рамы и препятствуют их повороту.

Линейные связи [○—○] препятствуют линейным перемещениям узлов.

Структура вводимых связей диктуется формулой $K = K_1 + K_2$: если $K_1 = 3$, то вводим три защемления, если $K_2 = 2$, то вводим две линейные связи. Рама, содержащая дополнительные связи и нагруженная заданной нагрузкой, представляет собой основную систему метода перемещений (ОСМП).

Таким образом, основная система состоит из совокупности статически неопределимых балок с различными закреплениями на концах.

Канонические уравнения рассмотрим на примере рамы, приведенной на рис. 8.5, нагруженной распределенной нагрузкой q .

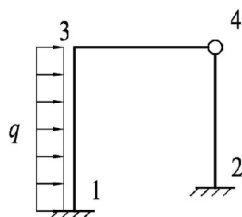


Рис. 8.5

1. Заданная рама имеет один жесткий узел 3. При действии нагрузки этот узел повернется на некоторый угол Z_1 . Одновременно узлы 3 и 4 переместятся линейно на величину Z_2 . Таким образом, рама имеет кинематическую неопределимость: $K = K_1 + K_2 = 1 + 1 = 2$.

2. Образует основную систему. Для этого накладываем на жесткий узел 3 защемление I, препятствующее его повороту (рис. 8.6), а на уровне ригеля 3-4 введем стержнек II, препятствующий линейному смещению узлов 3 и 4.

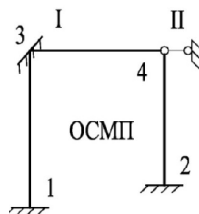


Рис. 8.6

После введения связей рама распадается на совокупность статически неопределимых балок двух типов: с двумя зашечленными концами (рис. 8.7, а) или с одним зашечленным и вторым шарнирно-опертым концом (рис. 8.7, б).



Рис. 8.7

Эти балки в МП являются типовыми (стандартными), и для них составлены таблицы 8.1 и 8.2, которые приведены ниже. В этих таблицах приведены реактивные моменты и реактивные усилия от единичных перемещений связей и от внешней нагрузки.

Во введенных связях I и II возникают реактивные усилия R_I и R_{II} . Для обратного перехода от основной к заданной системе необходимо устранить введенные связи. С этой целью повернем защемление I на действительный угол

поворота Z_1 (рис. 8.6), а связь II сместим на величину Z_2 . В результате от действительных смещений Z_1 и Z_2 в защемлении I и в стерженьке II возникнут реактивные усилия, равные по величине и противоположные по направлению усилиям R_{1p} и R_{2p} , полученным от внешней нагрузки. Так как в заданной системе защемления I нет и нет стерженька II, то реактивные усилия в них должны быть равны нулю. Это условие, отрицающее наличие реактивных усилий в наложенных связях I и II, в сжатой форме записи имеет вид:

$$R_{I(Z_1, Z_2, P)} = 0,$$

$$R_{II(Z_1, Z_2, P)} = 0.$$

Напишем уравнения в развернутом виде, заменив римские цифры на арабские:

$$R_{1Z_1} + R_{1Z_2} + R_{1P} = 0.$$

$$R_{2Z_1} + R_{2Z_2} + R_{2P} = 0.$$

R_{1Z_1} – реактивное усилие в связи I от поворота этой связи на угол z_1 ;

R_{1Z_2} – реактивное усилие в связи I от линейного смещения связи II;

R_{1Z_1} – реактивное усилие в связи I от внешней нагрузки.

R_{2Z_1} ; R_{2Z_2} ; R_{2P} – соответственно в связи II.

Введем усилия от единичных перемещений; тогда реакции распишутся в таком виде:

$$R_{1Z_1} = r_{11}Z_1; \quad R_{1Z_2} = r_{12}Z_2;$$

$$R_{2Z_1} = r_{21}Z_1; \quad R_{2Z_2} = r_{22}Z_2,$$

где r_{11} – усилие в I-связи от поворота I-связи на угол $Z_1 = 1$;

r_{12} – усилие в I-связи от линейного смещения II-связи на 1 и т. д.;

Z_1 – угол поворота жесткого узла 3;

Z_2 – линейное перемещение узлов 3 и 4 по горизонтали (по вертикали перемещение узлов невозможно благодаря наличию стоек 1-3 и 2-4, т. к. стойки принимаются недеформируемыми). При введении линейных связей следует иметь в виду, что они не всегда вводятся на уровне ригелей – «стерженек» может быть и вертикальным для препятствия вертикальному перемещению.

С учетом изложенного уравнения приобретают вид:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0. \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

В приведенном виде они представляют канонические уравнения при $K = 2$. При $K = 3$ будет три уравнения. В коэффициентах уравнений первый индекс показывает место, второй индекс – причину (перемещения), например, в

коэффициенте r_{21} это реактивное усилие в связи II, вызванное поворотом защемления I.

Если основная система содержит (n) дополнительных связей, то условие эквивалентности основной и заданной систем будет иметь вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Полученные уравнения называются каноническими уравнениями метода перемещений. Как было показано, в левой части любого i -го уравнения записана суммарная реакция, возникающая в i -й связи. Коэффициенты r_{ii} , стоящие на главной диагонали, а также определитель системы (8.2) всегда положительны. Побочные коэффициенты указанной системы обладают свойством взаимности

$$r_{ik} = r_{ki}.$$

Физический смысл канонических уравнений: каждое из уравнений отрицает суммарную реакцию, возникающую в i -й связи от смещения (линейного или углового) наложенных связей и от внешней нагрузки.

В канонические уравнения (8.2) вошли коэффициенты r_{ik} и R_{ip} , которые зависят от реактивных усилий на концах различных статически неопределимых балок, входящих в основную систему метода перемещений. Эти статически неопределимые балки можно свести к трем типам:

I – балка с двумя защемленными концами (рис. 8.8, а);

II – балка с одним защемленным концом и другим шарнирно опертым (рис. 8.8, б);

III – балка с одним защемленным, другим концом в виде ползуна, допускающего перемещение в направлении, перпендикулярном оси стержня (рис. 8.8, в).

Для этих типов балок определены реактивные усилия от единичных смещений и внешней нагрузки, и результаты сведены в табл. 8.1, 8.2. Ниже приводится определение реактивных усилий для некоторых случаев балок.

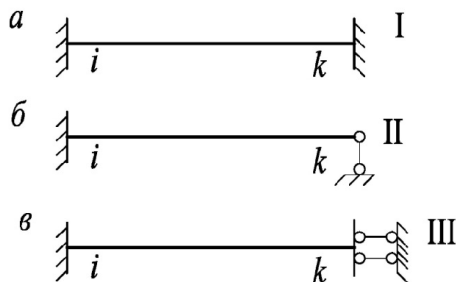


Рис. 8.8

8.2. Определение реактивных усилий в типовых статически неопределимых балках от единичных перемещений

Пример 8.1 (вывод первой строки табл. 8.1)

В качестве примера взята типовая балка с одним защемленным, вторым шарнирным концом (рис. 8.9, а). Вид воздействия – поворот левого защемления на угол $\varphi = 1$ против часовой стрелки.

Постановка задачи: построить эпюру M и определить реактивные усилия m_{ik} , q_{ik} по концам балки.

Для решения воспользуемся методом сил. Основная система метода сил показана на рис. 8.9, б, эквивалентная – на рис. 8.9, в. Балка один раз статически неопределима, и каноническое уравнение метода сил при $n = 1$ имеет вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1\varphi} = 0.$$

Так как нагрузки нет и $\Delta_{1p} = 0$, то уравнение приобретает вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\varphi} = 0.$$

Для определения коэффициента δ_{11} нагружаем основную систему (рис. 8.9, б) единичной силой $X_1 = 1$. Эпюра M_1 показана на рис. 8.9, г.

По эпюре M_1 (рис. 8.9, г) определяем:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1 \cdot l \cdot l}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l = \frac{l^3}{3EI}.$$

$\Delta_{1\varphi}$ определяем из геометрии (рис. 8.9, д):

$$\Delta_{1\varphi} = l \cdot \operatorname{tg} \alpha = l; \quad \alpha = \varphi = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \alpha = 1$$

(из-за малости деформаций).

После решения уравнения получаем:

$$X_1 = -\frac{3EI}{l^2} \quad \text{и} \quad M = M_1X_1 \quad (\text{рис. 8.9, е}).$$

По эпюре M имеем $m_{ik} = 3 \frac{EI}{l}$ и $q_{ik} = q_{ki} = \frac{3EI}{l^2}$ (строка 1 табл. 8.1).

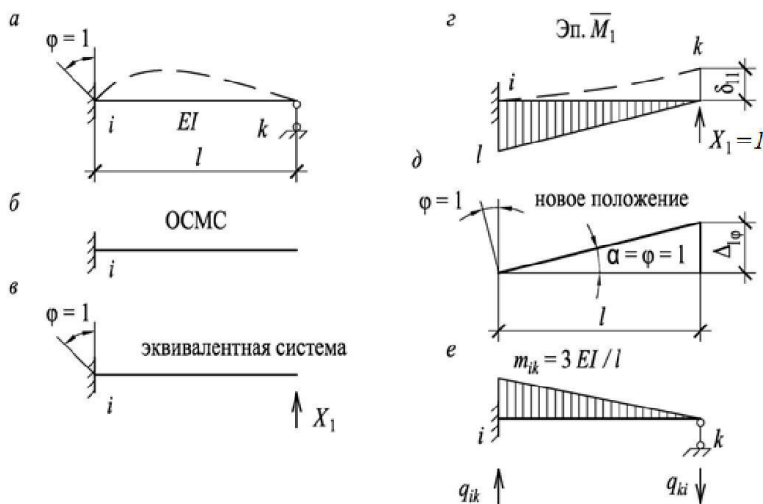


Рис. 8.9

Пример 8.2.

Определение реактивных усилий для балки рис. 8.9, а предыдущего типа, но от смещения правой опоры на $\Delta = 1$ вниз по вертикали (рис. 8.10).

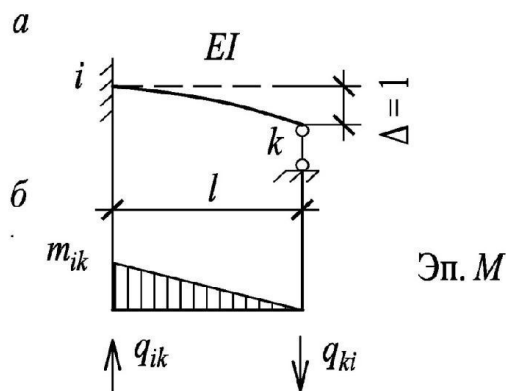


Рис. 8.10

Решаем методом сил, аналогично примеру 8.1.

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \Delta = 0,$$

откуда:

$$X_1 = -\frac{\Delta}{\delta_{11}}.$$

После решения получаем эпюру M (рис. 8.10, б). Приведенный пример соответствует второй строке табл. 8.1.

Реактивные усилия по эпюре M равны:

$$m_{ik} = 3 \frac{EI}{l^2}; \quad q_{ik} = q_{ki} = \frac{3EI}{l^3}.$$

Необходимо проявить внимательность при использовании табл. 8.1: *от линейных смещений* в формулах моментов в знаменателе величина l должна быть в квадрате (строки 2 и 4), а *от углов поворота* l – в первой степени (строки 1 и 3).

Аналогичные вычисления проведены также и для типовой балки с двумя защемленными концами. На базе проведенных вычислений составлена таблица 8.1, которая называется «Реакции в балках от единичных перемещений». В табл. 8.1, кроме того, имеется строка 5 для балки, имеющей один защемленный конец, а другой – в виде ползуна: такие балки используются в основном при расчете симметричных систем. При действии внешней нагрузки в типовых балках ОСМП (стержнях) тоже возникают усилия, которые необходимы для определения свободных членов (грузовых коэффициентов) канонических уравнений – R_{ip} . Эти усилия также определяются с использованием метода сил.

8.3. Определение реактивных усилий в типовых балках от внешней нагрузки

Реактивные усилия: изгибающий моменты и поперечные силы по опорным концам балок от внешней нагрузки и температурного воздействия определяются на основе метода сил.

Рассматриваются некоторые примеры определения реактивных усилий в балках от внешней нагрузки.

Таблица 8.1

Реакции в балках от единичных перемещений

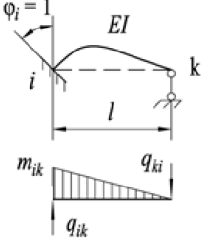
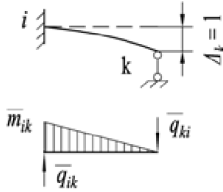
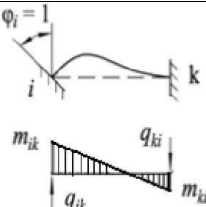
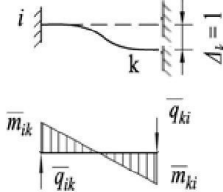
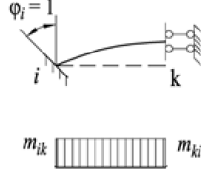
№ п/п	Единичное воздействие и эпюра моментов	Реактивные моменты	Реактивные усилия
1		$m_{ik} = 3 \frac{EI}{l}$	$q_{ik} = q_{ki} = 3 \frac{EI}{l^2}$
2		$\bar{m}_{ik} = 3 \frac{EI}{l^2}$	$\bar{q}_{ik} = \bar{q}_{ki} = 3 \frac{EI}{l^3}$
3		$m_{ik} = 4 \frac{EI}{l}$ $m_{ki} = 2 \frac{EI}{l}$	$q_{ik} = q_{ki} = 6 \frac{EI}{l^2}$
4		$\bar{m}_{ik} = \bar{m}_{ki}$ $= 6 \frac{EI}{l^2}$	$\bar{q}_{ik} = \bar{q}_{ki} = 12 \frac{EI}{l^3}$
5		$m_{ik} = \frac{EI}{l}$ $m_{ki} = -\frac{EI}{l}$	$q_{ik} = q_{ki} = 0$

Таблица 8.2

Реакции в балках от внешних сил и температуры

№ п/п	Единичное воздействие и эпора моментов	Реактивные моменты	Реактивные усилия
1		$M_{ik} = \frac{ql^2}{8}$	$V_{ik} = \frac{5}{8}ql$ $V_{ki} = \frac{3}{8}ql$
2		$M_{ik} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2}$	$V_{ik} = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3}$ $V_{ki} = \frac{Pa^2(3l - a)}{2l^3}$
3		$M_{ik} = -M_{ki} = \frac{ql^2}{12}$	$V_{ik} = V_{ki} = \frac{ql}{2}$
4		$M_{ik} = \frac{Pab^2}{l^2}$ $M_{ki} = -\frac{Pba^2}{l^2}$	$V_{ik} = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ $V_{ki} = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l}\right)$
5		$M_{ik} = \frac{ql^2}{3}$ $M_{ki} = \frac{ql^2}{6}$	$V_{ik} = ql$
6		$M_{ik} = \frac{Pl}{2} \left(2 - \frac{a}{l}\right) \frac{a}{l}$ $M_{ki} = \frac{Pla^2}{2l^2}$	$V_{ik} = P$
7		$M_{ik} = \frac{3}{2}EI \frac{\lambda_t(t_b - t_h)}{h}$	$V_{ik} = V_{ki} = \frac{3}{2}EI \frac{\lambda_t(t_b - t_h)}{2hl}$
8		$M_{ik} = -M_{ki} = \frac{\lambda_t EI(t_b - t_n)}{h}$	$V_{ik} = V_{ki} = 0$

Пример 8.3

Постановка задачи: построить эпюру M для заданной балки (рис. 8.11, а). Основная система метода сил выбрана с учетом симметрии (рис. 8.11, б), эквивалентная система показана на рис. 8.11, в.

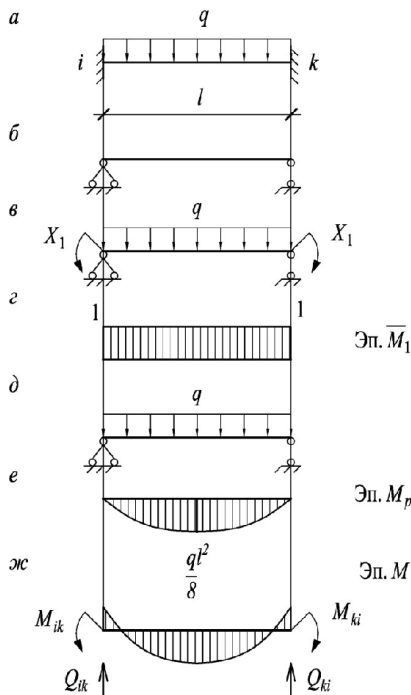


Рис. 8.11

Единичная эпюра показана на рис. 8.11, з, грузовая – на рис. 8.11, д. После решения канонического уравнения метода сил $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$ определяется X_1 , и строится эпюра действительных моментов $M = M_1x_1 + M_p$ (рис. 8.11, е).

В данном примере $M_{ik} = M_{ki} = \frac{ql^2}{12}$; $Q_{ik} = Q_{ki} = \frac{ql}{2}$.

Пример 8.4

Дана балка, один конец которой шарнирно оперт, другой имеет заделку (рис. 8.12, а). Балка статически неопределима один раз. После решения канонического уравнения $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$ и определения X_1 построена эпюра M (рис. 8.12, б).

Момент на защемленном конце балки равен:

$$M_{ik} = \frac{pb(l^2 - b^2)}{2l^2}.$$

Формулы поперечных сил Q_{ik} и Q_{ki} приведены в табл. 8.2, строка 2.

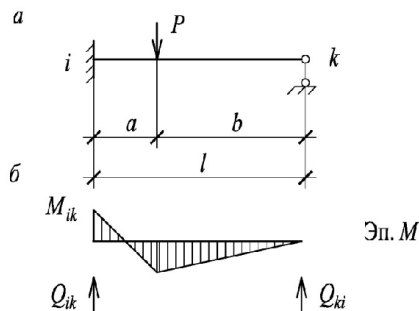


Рис. 8.12

Результаты расчета различных типов балок на внешние нагрузки и температурные воздействия приведены в табл. 8.2. В частности для рассмотренных выше примеров 8.3 и 8.4 реактивные усилия соответственно приведены в строках 3 и 2 табл. 8.2.

8.4. Расчет неразрезных балок методом перемещений

8.4.1. Основные понятия метода перемещений при расчете балок

При расчете балок (рам) методом перемещений за неизвестные принимаются не усилия, а угловые перемещения. В случае расчета неразрезных балок за неизвестные принимают угловые перемещения жестких внеопорных узлов. Линейная подвижность (линейные перемещения) внеопорных узлов отсутствует. Определив угловые перемещения внеопорных узлов, нетрудно определить необходимые усилия. При расчете неразрезных балок также выбирается основная система, но в отличие от метода сил, она образуется не путем отбрасывания лишних связей, а путем добавления новых связей (в виде защемлений).

Введем защемление I во внеопорном узле 1 (рис. 8.13).

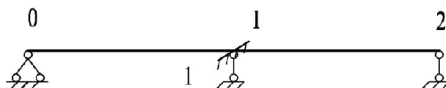


Рис. 8.13

Однако необходимо иметь в виду, что защементировать внеопорный узел означает лишить его возможности поворачиваться. *Защемление* – это не заделка, которая эквивалентна трем стержням, оно препятствует повороту, но не препятствует линейному перемещению. В такой связи могут возникать усилия только одного вида – момент. Добавление связей в заданную систему не усложнит задачи, т. к.

преобразованная таким образом балка представляет собой совокупность двух балок с защемленными и шарнирно-опертыми концами. Для таких балок имеются готовые формулы и эпюры, приводимые в таблицах 8.1 и 8.2.

Канонические уравнения метода перемещений для общего случая балок имеют вид (8.2). В этих уравнениях коэффициенты означают:

r_{ik} – реакция (реактивное усилие) связи i , вызванная единичным перемещением связи k ($Z_k = 1$), т. е. поворотом защемления I на единичный угол.

Z_k представляет собой неизвестное перемещение (действительный поворот k -ой связи).

R_{ip} – реакции дополнительных связей, вызванные внешней нагрузкой.

$r_{ik} = r_{ki}$ – побочные коэффициенты, обладают взаимностью.

Физический смысл коэффициентов:

r_{ik} и R_{ip} – реактивные моменты внеопорных узлов.

Z_k – углы поворота внеопорных узлов.

Коэффициенты при неизвестных (r_{ik}) определяются из эпюр единичных перемещений (углов поворота) внеопорных узлов, либо из рассмотрения равновесия этих узлов, либо по правилу Верещагина: $r_{ik} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} \cdot dx$.

Свободные члены R_{ip} определяют из условия равновесия узлов при нагружении основной системы внешней нагрузкой либо: $R_{ip} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_p}{EI} \cdot dx$.

После определения неизвестных перемещений определяются внутренние усилия и изгибающие моменты (численно):

$$M_k = M_k^p + M_k^1 Z_1 + M_k^2 Z_2 + \dots + M_k^n Z_n,$$

где k – сечение, в котором определяется момент. По эпюре M строится эпюра поперечных сил, как в методе сил.

Пример 8.5

Рассчитать методом перемещений неразрезную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $q = 2$ кН/м (рис. 8.14, а).

Решение

1. Определяем степень кинематической неопределимости. Она равна количеству жестких внеопорных узлов 1, 2 и 3. Линейная подвижность узлов балки отсутствует.

K — кинематическая неопределимость, число неизвестных возможных перемещений системы, которые полностью определяют ее состояние.

$$K = K_1 + K_2 = 3 + 0 = 3,$$

где K_1 — число угловых перемещений, K_2 — число линейных перемещений.

2. Образует основную систему путем наложения на внеопорные узлы трех защемлений (I, II, III) в узлах 1, 2, 3 (рис. 8.14, б), препятствующих их повороту. В заданной системе внеопорные узлы могут поворачиваться, как того требует нагрузка.

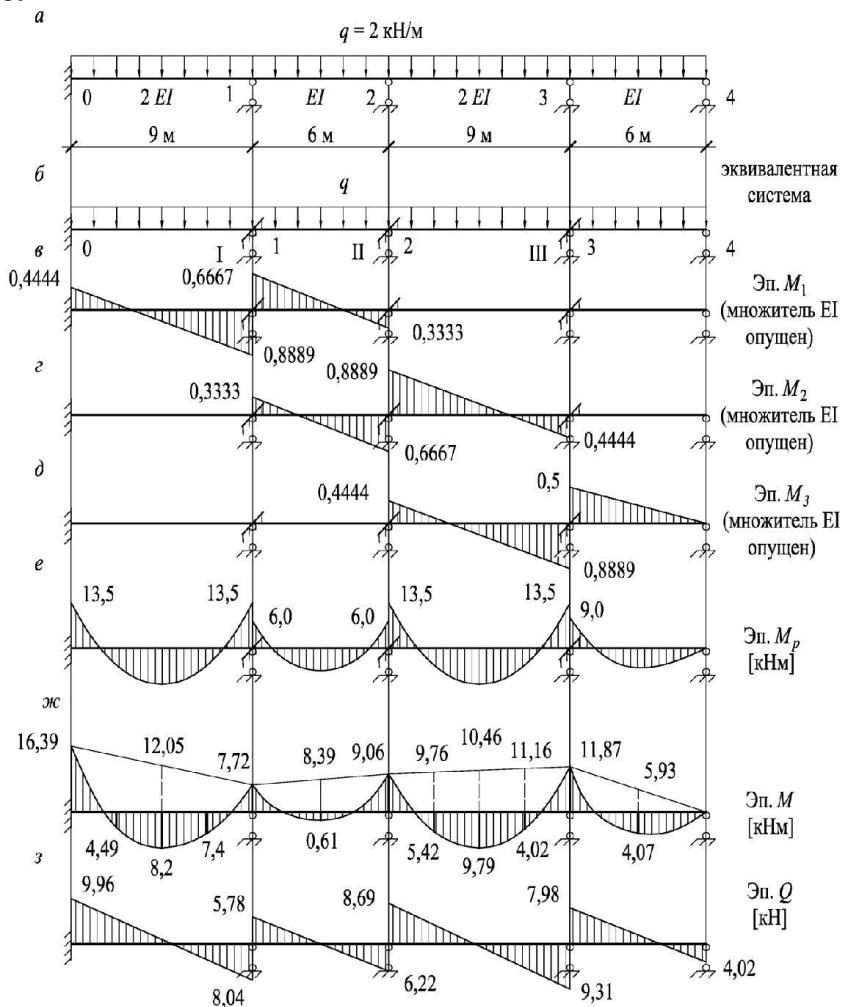


Рис. 8.14

3. Составляем каноническое уравнение метода перемещений, которое выражает собой равенство нулю реактивных усилий во введенных защемлениях от их поворота на угол Z_i и от внешней нагрузки. При повороте, например, защемления «I» на угол Z_1 , второго – на угол Z_2 и т. д. защемления I, II, III перестают оказывать влияние на узлы, и суммы состояний основной системы и заданной оказываются эквивалентными.

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0. \end{cases}$$

Z_1, Z_2, Z_3 – искомые углы поворота (действительные) узлов 1, 2, 3.

4. Определяем коэффициенты при неизвестных. Для этого последовательно поворачиваем защемления в узлах основной системы против часовой стрелки на угол $Z = 1$. При повороте защемления в узле 1 на угол $Z_1 = 1$ два смежных с этим узлом стержня (0 – 1 и 1 – 2) изогнутся, и в них возникнут изгибающие моменты (см. эпюру M_1 на рис. 8.14, в). Реактивные моменты на концах стержней 0-1, 1-2 определяем по табл. 8.1.

Пролет 0-1:

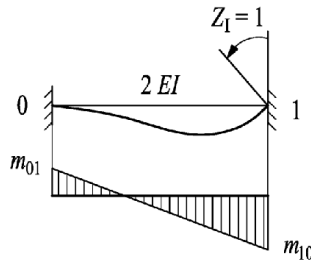


Рис. 8.15

$$m_{ik} = 4 \frac{EI_i}{l_i} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} m_{10} &= 4 \frac{2EI}{9} = 0,8889EI, \\ m_{01} &= 2 \frac{2EI}{9} = 0,4444EI. \end{aligned}$$

Пролет 1-2

Эпюра изгибающих моментов в пролете 1 – 2 от поворота защемления I на угол $Z_1 = 1$ показана на рис.8.16.

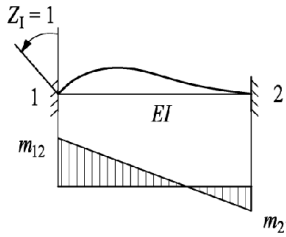


Рис. 8.16

$$m_{12} = 4 \frac{EI}{l} = 0,6667 EI,$$

$$m_{21} = 2 \frac{EI}{l} = 0,3333 EI \text{ и т. д.}$$

m_{ik} – первый индекс указывает место, где определяется момент, а второй – причину.

Вырезаем узлы 1, 2, 3 из основной системы (рис. 8.14, в, г, д). Из условия их равновесия определяем реактивные моменты r_{ik} в наложенных защемлениях.

По эпюре M_1 :

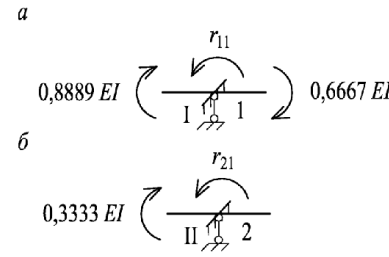


Рис. 8.17

$$\begin{cases} r_{11} = (0,8889 + 0,6667) \cdot EI = 1,55556 EI, \\ r_{21} = 0,3333 EI, \\ r_{31} = 0. \end{cases}$$

Здесь r_{11} – реактивный момент в дополнительной связи первого узла от его поворота на угол $Z_1 = 1$; r_{21} – реактивный момент в защемлении II от поворота защемления I на угол $Z_1 = 1$ (рис.8.17).

Определение знака:

если направление реактивного усилия совпадает с направлением поворота защемления, то знак «+», в противном случае – «-».

По эпюре M_2 :

аналогичным образом определяем реактивные усилия в защемлениях I, II и III от поворота защемления II на угол $Z_2=1$ и защемления III на угол $Z_3=1$ (рис. 8.18,з, 8.18,д).

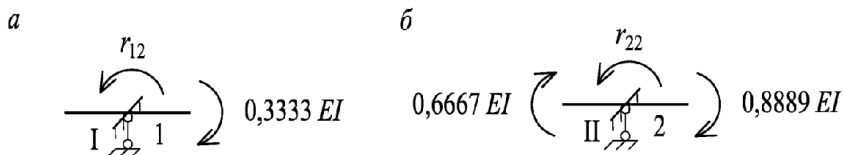


Рис. 8.18

$$\begin{cases} r_{12} = 0,333EI, \\ r_{22} = 0,6667 + 0,8889 = 1,5556EI, \\ r_{32} = r_{23} = 0,4444EI, \\ r_{33} = 0,5 + 0,8889 = 1,3889EI. \end{cases}$$

Направление реактивных моментов в защемлениях совпадает с поворотом узлов против часовой стрелки. Это означает, что все они имеют положительный знак. При этом побочные коэффициенты равны, например, $r_{21} = r_{12}$ и т. д.

Реактивные усилия с одинаковыми индексами r_{ii} всегда положительны, т. к. их направление всегда совпадает с принятым направлением перемещения дополнительной связи « i » или i -го защемления.

5. Определяем грузовые коэффициенты R_{ip} . Для этого строим грузовую эпюру « M_p » (рис. 8.14, е). Для упрощения построения используем таблицу 8.2, например, для пролета 01 использована строка 3 (рис. 8.19). Реактивные усилия R_{ip} определяем из условия равновесия узлов, в которых введены защемления (рис. 8.20, 8.21).

Пролет 0-1:

$$M_{01} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{2 \cdot 9^2}{12} = 13,5 \text{ кНм.}$$

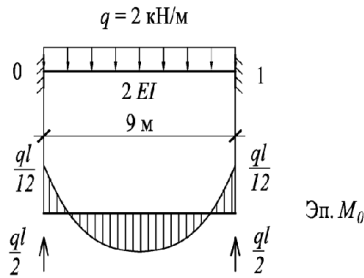


Рис. 8.19

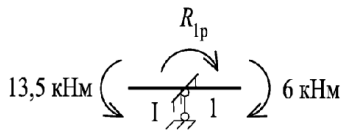


Рис. 8.20

$$R_{1p} = 13,5 - 6 = -7,5 \text{ кНм.}$$

Направление реактивного момента R_{1p} противоположно моменту r_{11} , поэтому в уравнения ниже R_{1p} входит со знаком минус.

Аналогично для узла 2 (см. эпюры M_p , рис. 8.14, e).

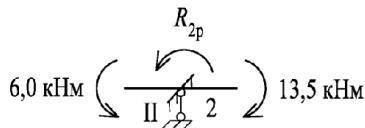


Рис. 8.21

Из равновесия узла 2 (рис. 8.21) находим реактивный момент в защемлении II, вызванный внешней нагрузкой $-R_{2p} = 7,5 \text{ кНм}$. Аналогично из равновесия узла 3 находим $R_{3p} = -4,5 \text{ кНм}$.

6. Формируем канонические уравнения и производим их решение посредством известных математических методов или ЭВМ.

$$\begin{cases} EI \cdot 1,5556 \cdot Z_1 + EI \cdot 0,3333 \cdot Z_2 + 0 - 7,5 = 0, \\ EI \cdot 0,3333 \cdot Z_1 + EI \cdot 1,5556 \cdot Z_2 + EI \cdot 0,4444 \cdot Z_3 + 7,5 = 0, \\ 0 + EI \cdot 0,4444 \cdot Z_2 + EI \cdot 1,3889 \cdot Z_3 - 4,5 = 0. \end{cases}$$

$$D = (EI)^3 \begin{vmatrix} 1,5556 & 0,3333 & 0 \\ 0,3333 & 1,5556 & 0,4444 \\ 0 & 0,4444 & 1,3889 \end{vmatrix} = 1,5556 \cdot 1,5556 \cdot 1,3889 + 0 + 0 - 0 - 0,3333 \cdot 0,3333 \cdot 1,3889 -$$

$$- 0,4444 \cdot 0,4444 \cdot 1,5556 = 3,3608 - 0,1542 - 0,3072 = 2,8994 \cdot (EI)^3.$$

$$\Delta_1 = (EI)^2 \begin{vmatrix} 7,5 & 0,3333 & 0 \\ -7,5 & 1,5556 & 0,4444 \\ 4,5 & 0,4444 & 1,3889 \end{vmatrix} = 7,5 \cdot 1,5556 \cdot 1,3889 + 0,3333 \cdot 0,4444 \cdot 4,5 - 7,5 \cdot 0,4444 \cdot 0 -$$

$$- 0 + 7,5 \cdot 0,3333 \cdot 1,3889 - 0,4444 \cdot 0,4444 \cdot 7,5 = 16,2037 + 0,6666 + 3,4719 - 1,4811 = 18,861 (EI)^2.$$

$$Z_1 = \frac{\Delta_1}{D} = \frac{18,861}{2,8994} = 6,5051 \frac{1}{EI}.$$

$$\Delta_2 = (EI)^2 \begin{vmatrix} 1,5556 & 7,5 & 0 \\ 0,3333 & -7,5 & 0,4444 \\ 0 & 4,5 & 1,3889 \end{vmatrix} = -1,5556 \cdot 7,5 \cdot 1,3889 + 0 + 0 - 0 - 0,3333 \cdot 7,5 \cdot 1,3889 -$$

$$- 4,5 \cdot 0,4444 \cdot 1,5556 = -16,2037 - 3,4719 - 3,1108 = -22,7868 (EI)^2.$$

$$Z_2 = \frac{\Delta_2}{D} = -\frac{22,7868}{2,8994} = -7,8591 \frac{1}{EI}.$$

$$\Delta_3 = (EI)^2 \begin{vmatrix} 1,5556 & 0,3333 & 7,5 \\ 0,3333 & 1,5556 & -7,5 \\ 0 & 0,4444 & 4,5 \end{vmatrix} = 1,5556 \cdot 1,5556 \cdot 4,5 + 0,3333 \cdot 0,4444 \cdot 7,5 - 0 -$$

$$- 0,3333 \cdot 0,3333 \cdot 4,5 + 0,4444 \cdot 7,5 \cdot 1,5556 = 10,8889 + 1,1108 - 0,4998 + 5,1848 = 16,5946 (EI)^2.$$

$$Z_3 = \frac{\Delta_3}{D} = \frac{16,5946}{2,8994} = 5,7234 \frac{1}{EI}.$$

Проверим правильность решения уравнений. Для этого подставляем найденные значения Z в канонические уравнения, например, первое уравнение. Имеем:

$$1,5556 \cdot 6,5051 - 0,3333 \cdot 7,8592 - 7,5 = 10,1193 - 2,6194 - 7,5 = 0.$$

Равенство нулю означает, что уравнения решены верно.

7. Вычисляем значения изгибающих моментов так же, как в методе сил, и строим окончательную эпюру M :

$$M_k = M_k^p + M_k^1 Z_1 + M_k^2 Z_2 + M_k^3 Z_3,$$

где k – сечение, в котором определяется момент, а верхний индекс указывает эпюру изгибающих моментов, из которой берется значение момента.

Для узла (0)

$$M_0 = -13,5 - 0,4444 \cdot 6,5051 + 0 + 0 = -13,5 - 2,8908 = -16,3908 \text{ кНм}.$$

Для узла (1)

$$M_{1(\text{лев})} = -13,5 + 0,8889 \cdot 6,5051 = -13,5 + 5,7829 = 7,7177 \text{ кНм}.$$

$$M_{1(\text{пр})} = -6 - 0,6667 \cdot 6,5051 + 0,3339 \cdot 7,859 = -6 - 4,3369 + 2,6194 = -7,7175 \text{ кНм}.$$

Моменты в середине загруженных пролетов находим, используя метод наложения.

Пролет 0-1:

$$M_{l=4,5} = \frac{q \cdot l^2}{8} - \frac{M_{01} + M_{10}}{2} = \frac{2 \cdot 9^2}{8} - \frac{16,39 + 7,72}{2} = 20,25 - 12,05 = 8,20 \text{ кНм}.$$

$$\frac{q \cdot l^2}{8} - \text{вычисляем для балки посередине пролета.}$$

M_{01} и M_{10} берем из эпюры M . На знаки можно не обращать внимания, если ординаты расположены по одну сторону.

Действительная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 8.14, жс.

8. Выполняем деформационную проверку. Для этого, например, устраняем лишние связи заданной неразрезной балки (рис. 8.14, а), т. е. выбираем любую основную систему метода сил.



Рис. 8.22

Приложим по направлению первой связи единичную силу и построим от нее эпюру изгибающих моментов \overline{M}_1^* . Перемножая эту эпюру \overline{M}_1^* на окончательную эпюру M , мы должны получить ноль.

$$\sum \int \frac{\overline{M}_1^* \cdot M}{EI} \cdot dx = 0,$$

т. к. перемещение по направлению отброшенной опорной связи в действительности отсутствует.

$$\sum \int \frac{\overline{M}_1^* \cdot M}{EI} \cdot dx = \frac{9}{6 \cdot 2 \cdot EI} (-9 \cdot 16,39 + 4 \cdot 8,2 \cdot 4,5 - 7,72 \cdot 0) \approx 0.$$

Значит, эпюра « M » построена правильно.

9. Выполняем построение эпюры « Q ». Эпюра « Q » строится по эпюре « M », как обычно делают это при решении задач методом сил, используя метод вырезания стержней (см. эпюру Q на рис. 8.14, з).

10. Определяем опорные реакции по эпюре « Q ». Из курса «Сопротивление материалов» известно, что скачок на эпюре Q возможен от действия сосредоточенной силы, поэтому реакции в опорах 0, 1, 2, 3, 4 будут соответственно равны:

$$V_0 = 9,96 \text{ кН.}$$

$$V_1 = 8,04 + 5,78 = 13,82 \text{ кН.}$$

$$V_2 = 6,22 + 8,69 = 14,91 \text{ кН.}$$

$$V_3 = 9,31 + 7,98 = 17,29 \text{ кН.}$$

$$V_4 = 4,02 \text{ кН.}$$

11. Выполняем статическую проверку.

Для этого составляем уравнения равновесий в виде суммы проекций всех сил на ось OY или в виде суммы моментов всех сил относительно любой точки балки (рис. 8.23).

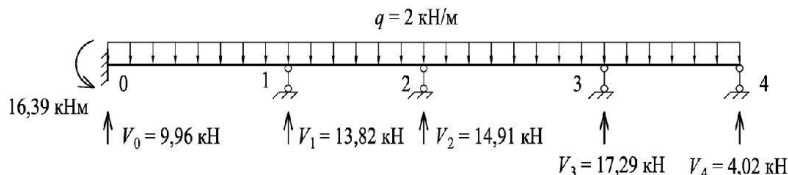


Рис. 8.23

$$\sum y = -2(9 + 6 + 9 + 6) + 9,96 + 13,82 + 14,91 + 17,29 + 4,02 = -60 + 60 = 0.$$

При выполнении этих условий делаем вывод, что эпюры поперечных сил и изгибающих моментов построены правильно.

Необходимо иметь ввиду, что может возникнуть погрешность, но если задача решена правильно, то она незначительна и составляет менее 0,1 %. В данном примере приведен расчет балок на постоянную нагрузку. Расчет неразрезных балок на действие временной нагрузки производится аналогично. Различие состоит лишь в порядке нагружения пролетов временной нагрузкой и выявлении расчетных изгибающих моментов и поперечных сил.

8.5. Расчет рам с линейно-неподвижными узлами

Пример 8.6

Рассчитать раму с линейно неподвижными узлами, если нагрузка и размеры известны. Параметр $i = EI/l$ (рис 8.24)

1. Определяем степень кинематической неопределимости. Она определяется по формуле $K = K_1 + K_2$. В данной раме K_1 – количество

внеопорных жестких узлов. $K_1 = 2$. K_2 – число независимых линейных смещений. $K_2 = 2Y - C$; $Y = 5$; $C = 10$; $K_2 = 2 \cdot 5 - 10 = 0$.

С учетом этого $K = 2$.

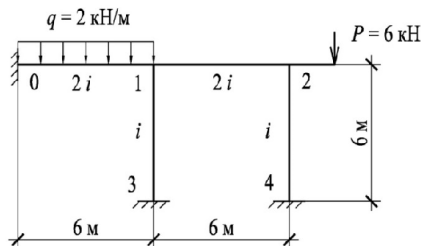


Рис. 8.24

2. Выбираем основную систему. Для этого вводим защемления I, II.

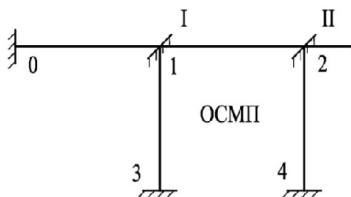


Рис. 8.25

3. Составляем каноническое уравнение метода перемещений.

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0'$$

где Z_1 и Z_2 – искомые углы поворота узлов 1 и 2, r_{ik} – реактивное усилие (момент) в i -й связи от поворота k -й связи на угол $Z_k = 1$, R_{ip} – реактивное усилие (момент) в i -й связи от внешней нагрузки.

4. Определяем коэффициенты при неизвестных.

Для этого строим эпюры моментов M_1 , M_2 (рис. 8.26 и 8.27) от поворота защемления I в узле 1 на угол $Z_1 = 1$ (поворот против часовой стрелки) и защемления II на угол $Z_2 = 1$. Моменты определяем по таблице 8.1.

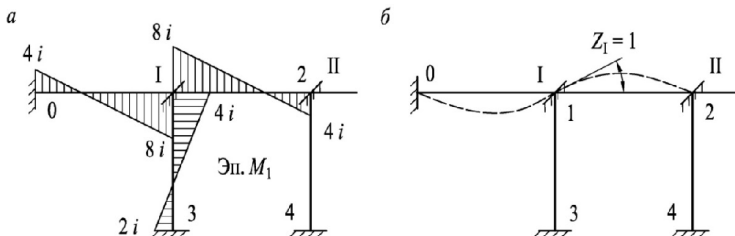


Рис. 8.26

$$m_{12} = 4 \cdot i_{12} = 4 \cdot 2 \cdot i = 8 \cdot i;$$

$$m_{10} = 4 \cdot i_{10} = 4 \cdot 2 \cdot i = 8 \cdot i;$$

$$m_{13} = 4 \cdot i_{13} = 4 \cdot 1 \cdot i = 4 \cdot i;$$

При повороте заземления II в узле 2 на угол $\varphi_2=1$ аналогично определяем моменты и строим эпюру моментов M_2 .

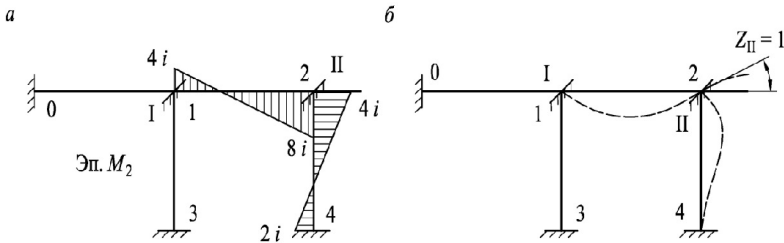


Рис. 8.27

5. Для определения коэффициентов r_{11} , r_{12} вырезаем узлы 1 и 2 по эп. M_1 .

Из условия равновесия $\sum M_1 = 0$ находим реактивное усилие r_{11} (рис. 8.28).

$$\sum M_1 = 0. \quad r_{11} = (8 + 8 + 4) \cdot i = 20 i.$$

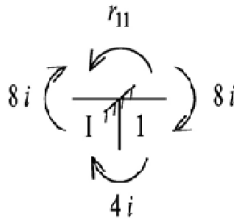


Рис. 8.28

Аналогично для узла 2:

$$\sum M_2 = 0. \quad r_{21} = 4 i.$$

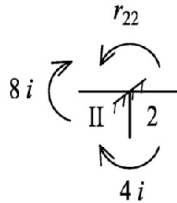


Рис. 8.29

Рассматриваем эпюру M_2 (рис. 8.27).

Из равновесия узла 1 находим реактивное усилие r_{12} : $r_{12} = 4 i$.

Аналогично для узла 2 (рис. 8.29): $r_{22} = 4i + 8i = 12i$.

Таким образом, реакции в защемлениях найдены. При этом должно соблюдаться равенство $r_{12} = r_{21}$, т. е. коэффициенты r_{12} и r_{21} обладают свойством взаимности. При расчетах используем это для проверки коэффициентов.

6. Строим эпюру моментов от заданной нагрузки q и P .

Концевые моменты определяем по табл. 8.2., строка 3.

$$M_{01} = M_{10} = \frac{q \cdot l_{01}^2}{12} = \frac{2 \cdot 6^2}{12} = 6 \text{ кНм.}$$

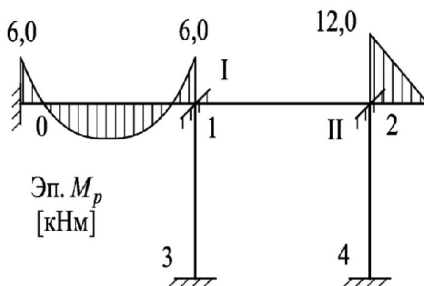


Рис. 8.30

Вырезаем узлы из эпюры M_p (рис. 8.30) и из условия их равновесия находим реактивные усилия R_{1p} , R_{2p} .

Для узла 1 реактивное усилие равно $R_{1p} = -6$ кНм и имеет знак минус, так как направление угла поворота защемления I не совпадает с направлением R_{1p} (рис. 8.31). Для узла 2 (рис. 8.32) знак реактивного усилия совпадает со знаком поворота защемления, поэтому R_{2p} имеет положительное значение.

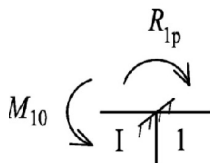


Рис. 8.31

Аналогично находим реактивное усилие R_{2p} из условия равновесия узла 2 (рис. 8.32):

$\sum M_2 = 0$, откуда $R_{2p} = 12 \text{ кНм}$.

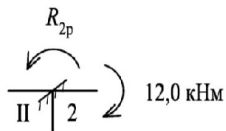


Рис. 8.32

7. Решаем систему канонических уравнений.

$$20iZ_1 + 4iZ_2 - 6 = 0,$$

$$4iZ_1 + 12iZ_2 + 12 = 0.$$

Решаем методом подстановки, если число неизвестных больше 2, то решение производим по методу Гаусса, Зейделя, другими методами или посредством ЭВМ.

$$Z_1 = \frac{0,54}{i}; \quad Z_2 = \frac{-1,18}{i}.$$

Проверка: при подстановке Z_1 и Z_2 в каноническое уравнение они должны быть тождественно равны нулю. При вычислении после запятой необходимо брать не менее двух знаков, иначе проверка не сойдется.

8. Определяем действительную величину изгибающих моментов в характерных сечениях и строим окончательную эпюру моментов так же, как в методе сил (рис. 8.33). Моменты в характерных сечениях определяем по формуле:

$$M_k = M_p^k + M_1^k \cdot Z_1 + M_2^k \cdot Z_2,$$

где k – сечение, в котором определяются моменты.

По этой формуле подсчитываем моменты в характерных сечениях.

Например:

$$M_{01} = -6 - 4 \cdot 0,54 + 0 = -8,16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{10} = -6 + 8 \cdot 0,54 = -1,68 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{12} = -8 \cdot 0,54 + 4 \cdot 1,18 = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

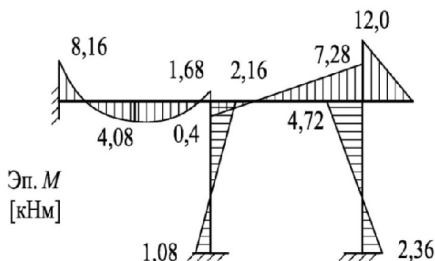


Рис. 8.33

9. Проверка расчета:

9.1. *Статическая.* Для этого вырезаем узлы и рассматриваем их равновесие. Прикладываем в их сечениях моменты, взятые из эпюры (рис. 8.33).

Узел 1

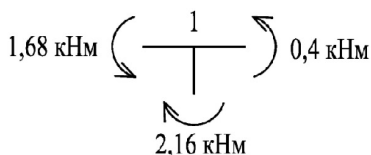


Рис. 8.34

$$\sum M_1 = 2,16 - 1,68 - 0,4 = 0,08.$$

Оценим в процентах:

$$\frac{0,08 \cdot 100}{2,12} \approx 3,77\%.$$

Допускается процентное расхождение до 5 %.

Аналогично для узла 2.

Узел 2

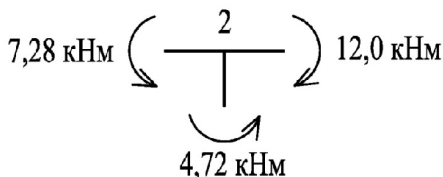


Рис. 8.35

$$\sum M_2 = 12 - 7,28 - 4,72 = 0.$$

Статическая проверка необходима, но не достаточна.

9.2. Деформационная проверка.

Выполняем так же, как в методе сил. Выбираем основную систему метода сил путем отбрасывания лишних связей (рис. 8.36):

Нагружаем основную систему единичной силой (безразмерной) и строим эпюру \bar{M}_1^* (рис. 8.36). Перемножаем эпюру действительных моментов M и эпюру \bar{M}_1^* посредством интеграла Мора и правила Верещагина по формуле

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1^* \cdot M}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 2i} (-8,16 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 4,08 + 0) = 48,96 - 48,96 \cong 0.$$

Деформационная проверка проходит.

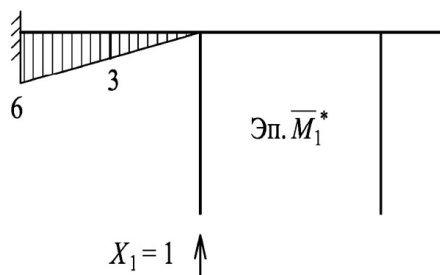


Рис. 8.36

Примечание: если решать эту задачу методом сил, то число неизвестных равно шести, т.е. необходимо решать шесть уравнений, что затруднительно.

Таким образом, для рассматриваемого примера более рациональным является метод перемещений.

8.6. Расчет рам с линейно подвижными узлами

Пример 8.7

Для рамы (рис. 8.37) нагрузка, размеры и жесткость стержней EI известны, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

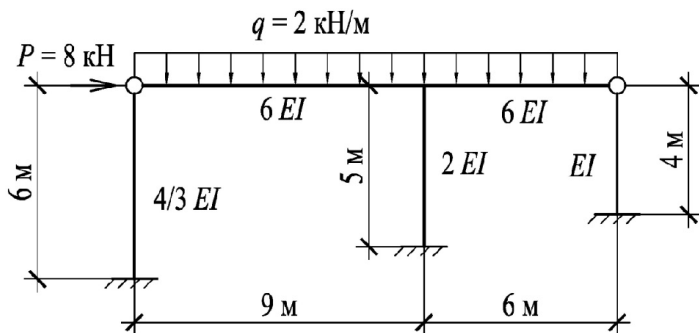


Рис. 8.37

1. Определяем число неизвестных по методу перемещений (степень кинематической неопределимости).

$$K = K_1 + K_2,$$

где K_1 – число неизвестных углов поворота узлов,

K_2 – число неизвестных линейных перемещений.

$$K = 1 + 1 = 2.$$

2. Образует основную систему. Для этого введем защемление I в третий узел и на уровне ригеля 3-4 (рис. 8.38) – стерженек II, препятствующий линейному перемещению узлов.



Рис. 8.38

3. Составляем канонические уравнения метода перемещений.

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Первое уравнение выражает собой, что реактивное усилие (момент) в защемлении I от поворота защемления, смещения и от внешних сил равно нулю. Иначе это уравнение отрицает наличие реактивного момента в защемлении I.

Второе уравнение отрицает наличие реактивного усилия в линейной связи II.

4. Определяем коэффициенты при неизвестных и грузовые члены системы уравнений (8.1).

а) Строим эпюры изгибающих моментов для основной системы (рис. 8.38), которые представлены на рис. 8.39, 8.40, 8.54.

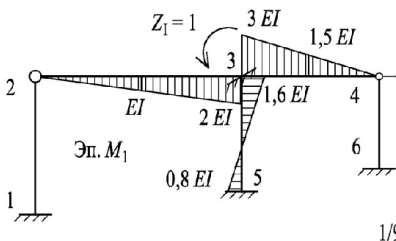


Рис. 8.39

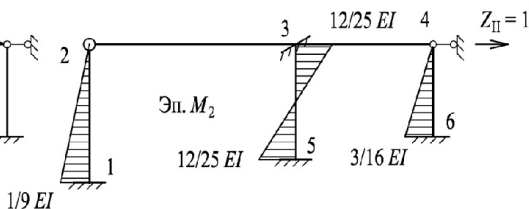


Рис. 8.40

Эпюра M_1 (рис. 8.39) получена от поворота защемления I на угол $Z_1 = 1$ против часовой стрелки. При этом моменты возникают в стержнях, примыкающих к поворачиваемому узлу. Эпюра изгибающих моментов M_2 (рис. 8.40) построена от линейного смещения связи II вправо на $Z_2 = 1$. От такого линейного смещения

изогнутся только стойки и эпюры изгибающих моментов возникнут в этих стойках. Моменты определяем по табл. 8.1. Ниже показана процедура определения моментов в отдельных стержнях рассматриваемой рамы. Изгибающие моменты находим по участкам. В начале рассматривается определение моментов для построения эпюры M_1 .

Участок 2-3:

$$m_{32} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 6 \cdot EI}{9} = 2EI \text{ (рис. 8.41).}$$

$$m_{23} = 0.$$

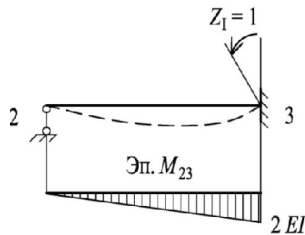


Рис. 8.41

Участок 3-4:

$$m_{34} = \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 6 \cdot EI}{6} = 3EI \text{ (рис. 8.42).}$$

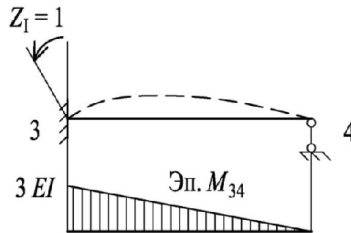


Рис. 8.42

Участок 3-5 (рис. 8.43):

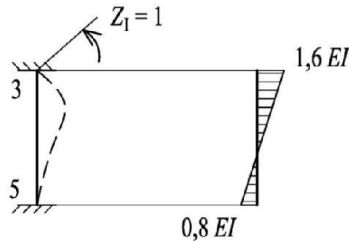


Рис. 8.43

$$m_{35} = \frac{4EI}{l} = \frac{4 \cdot 2 \cdot EI}{5} = 1,6EI.$$

$$m_{53} = \frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot EI}{5} = 0,8EI.$$

$$q_{35} = \frac{2,4EI}{5} = 0,48EI.$$

По эпюре моментов M_1 (рис. 8.39) определяем коэффициенты r_{11}, r_{21} . Для определения главного коэффициента r_{11} вырезаем из эпюры M_1 узел 3 (рис. 8.44) и рассматриваем его равновесие.

$$\sum M_3 = 0, \text{ отсюда } r_{11} = 2EI + 3EI + 1,6EI = 6,6EI.$$

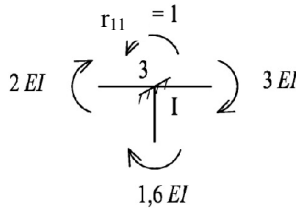


Рис. 8.44

Для определения реактивного усилия r_{21} в связи II, вырезаем ригель 2-3-4 и, проектируя все горизонтальные силы на ось X находим r_{21} (рис. 8.45).

$$\sum X = 0, \text{ отсюда } r_{21} = 0,48EI = q_{35}.$$

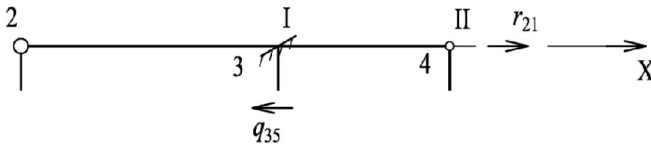


Рис. 8.45

б) Определяем коэффициенты от смещения связи II ($Z_2 = 1$) вправо.

При смещении стержни 1-2, 3-5, 4-6 деформируются, и в них возникнут изгибающие моменты.

Участок 4-6 (рис. 8.46)

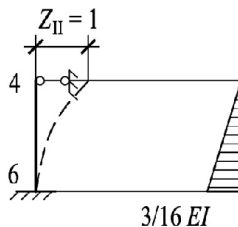


Рис. 8.46

$$M_{46} = 0.$$

$$M_{64} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{4^2} = \frac{3EI}{16}.$$

$$q_{46} = q_{64} = \frac{M_{64}}{l} = \frac{3}{16 \cdot 4} EI = \frac{3}{64} EI.$$

Участок 3-5 (рис. 8.47):

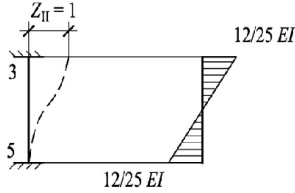


Рис. 8.47

$$M_{35} = M_{53} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6 \cdot 2EI}{5^2} = \frac{12}{25} EI.$$

$$q_{35} = q_{53} = \frac{24}{25} \cdot \frac{EI}{5} = \frac{24}{125} EI.$$

Участок 2-1 (рис. 8.48)

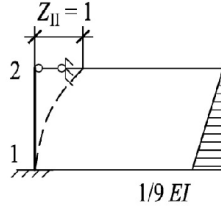


Рис. 8.48

$$M_{12} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3 \cdot \frac{4}{3} EI}{6^2} = \frac{EI}{9}.$$

$$q_{21} = q_{12} = \frac{EI}{9 \cdot 6} = \frac{EI}{54}.$$

По полученным вычислениям построена эпюра M_2 (рис. 8.49).

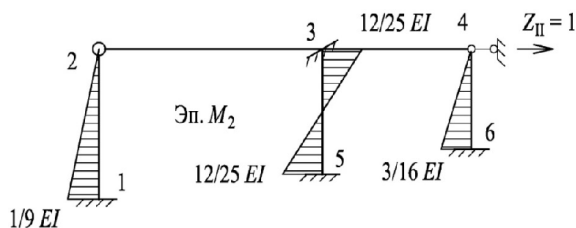


Рис. 8.49

По эпюре M_2 определяем коэффициенты r_{22} и r_{12} , т. е. реактивные усилия во введенных связях I и II от смещения линейной связи I.

Для определения r_{12} вырезаем узел 3 (рис. 8.50):

$$r_{12} = m_{35} = \frac{12}{25}.$$

Рис. 8.50

Сопоставляя коэффициенты, видим, что $r_{21} = r_{12}$ обладают взаимностью, хотя их физический смысл здесь различен. r_{21} представляет продольное усилие, r_{12} — изгибающий момент.

Вырезаем ригель 2-3-4 из эпюры « M_2 ». Рассматриваем его равновесие. Определяем коэффициент r_{22} .

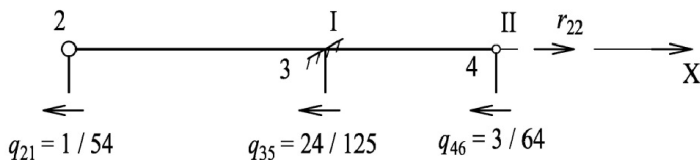


Рис. 8.51

$$\sum X = -q_{21} - q_{35} - q_{46} + r_{22} = 0,$$

откуда $r_{22} = \frac{EI}{54} + \frac{24EI}{125} + \frac{3EI}{64} = (0,0185 + 0,192 + 0,0468)EI = 0,2573EI$.

Поясним значения поперечных сил стоек:

$$q_{21} = \frac{m_{12}}{l_{12}} = \frac{1}{9 \cdot 6} = \frac{1}{54}; \quad q_{35} = \frac{m_{35} + m_{53}}{l_{35}} = \left(\frac{12}{25} + \frac{12}{25} \right) / 5 = \frac{24}{125};$$

$$q_{46} = \frac{m_{64}}{l_{64}} = \frac{3}{16 \cdot 4} = \frac{3}{64}.$$

в) Определяем реактивные усилия от внешних нагрузок. Эпюры возникают только на загруженных стержнях (рис. 8.52, а).

Стержень 2-3:

$$M_{32} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 9^2}{8} = 20,25 \text{ кНм.}$$

Стержень 3-4:

$$M_{34} = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 6^2}{8} = 9 \text{ кНм.}$$

$$M_{43} = 0.$$

По эпюре M_p (рис. 8.52, б) определяем грузовые коэффициенты R_{1p} и R_{2p} .

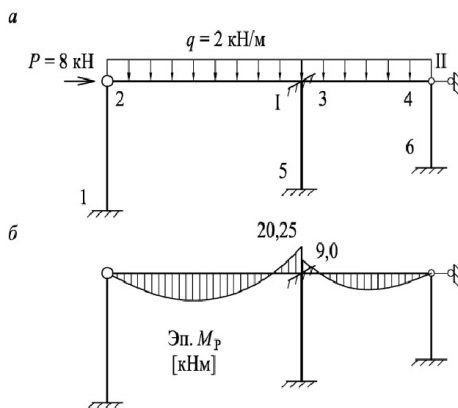


Рис. 8.52

Вырезаем узел 3 из эпюры M_p . Определяем R_{1p} в наложенной связи I (рис. 8.53).

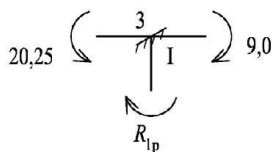


Рис. 8.53

Из условия равновесия узла:

$$\sum M_3 = 0, \quad 20,25 - 9 - R_{1p} = 0,$$

откуда $R_{1p} = -11,25 \text{ кНм}$. Знак «минус» означает, что направление реактивного момента R_{1p} не совпадает с направлением поворота защемления I.

Для определения реактивного усилия R_{2p} , возникающего в линейной связи II, вырезаем ригель 2-3-4, и из его равновесия находим R_{2p} .

$\sum X = 0$, откуда $R_{2p} = -P$. В связи с тем, что реактивное усилие R_{2p} не совпадает по направлению с линейным перемещением Z_2 связи II, оно принимается со знаком минус.

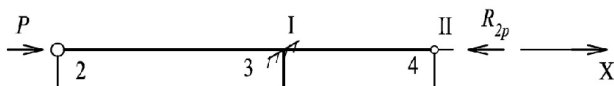


Рис. 8.54

5. Решаем систему уравнений (8.1).

С учетом коэффициентов уравнения (8.1) имеют вид:

$$\begin{cases} 6,6EI \cdot Z_1 + 0,48EI \cdot Z_2 - 11,25 = 0 \\ 0,48EI \cdot Z_1 + 0,257EI \cdot Z_2 - 8 = 0 \end{cases}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, предварительно умножив первое из них на 0,48, а второе на 6,6, имеем:

$$-1,4658EI \cdot Z_2 + 50,64 = 0.$$

$$Z_2 = \frac{47,4}{1,466EI} = 32,33 \frac{1}{EI}.$$

$$Z_1 = \frac{5,4 - 0,23 \cdot 32,33}{3,168EI} = -0,643 \frac{1}{EI}.$$

Здесь Z_1 и Z_2 – найденные неизвестные, соответственно действительные угол поворота Z_1 и линейное перемещение Z_2 .

6. Строим окончательную эпюру действительных моментов, используем принцип независимости действия сил.

$$M_k = M_p^k + M_1^k Z_1 + M_2^k Z_2,$$

где k – сечение, в котором определяется момент. Нижний индекс в правой части соответствует M_p , M_1 и M_2 . Ниже приводятся результаты определения действительных моментов M в характерных сечениях стержней рамы:

$$M_{12} = 0 - \frac{1}{9} 32,33 = -3,59 \text{ кНм}.$$

$$M_{21} = 0.$$

$$M_{32} = -20,25 - 0,643 \cdot 2 + 0 = -21,536 \text{ кНм}.$$

$$M_{34} = -9 + 3 \cdot 0,643 + 0 = -7,071 \text{ кНм}.$$

$$M_{35} = 0 + 1,6 \cdot 0,643 - 0,48 \cdot 32,33 = -14,49 \text{ кНм.}$$

$$M_{53} = -0,8 \cdot 0,643 + 0,48 \cdot 32,33 = 15 \text{ кНм.}$$

$$M_{64} = \frac{3}{16} \cdot 32,33 = 6,062 \text{ кНм.}$$

По данным этих расчетов строится эпюра действительных моментов, представленная на рис. 8.55.

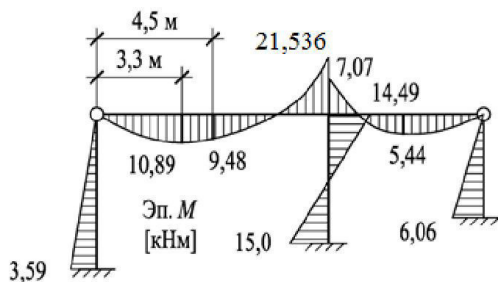


Рис. 8.55

7. Выполняем деформационную проверку. Для этого определяем перемещения по направлению отброшенных связей выбранной основной системы. Например для нашей рамы принимаем основную систему, разрезав раму по шарнирам 2 и 4. Основная система метода сил показана на рис. 8.56, а эпюра изгибающих моментов \bar{M}_1^* от единичного усилия $X_1=1$ в основной системе метода сил, представлена на рис.8.57.

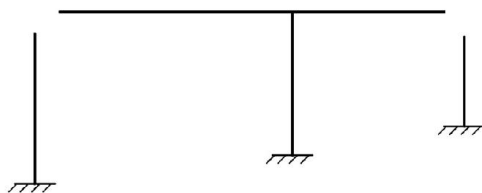


Рис. 8.56

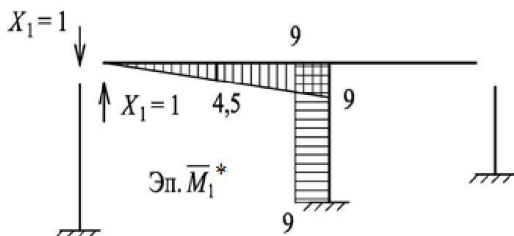


Рис. 8.57

Вычисление перемещения выполняем посредством интеграла Мора и правила Верещагина, путем перемножения эюр \bar{M}_1^* и M (рис. 8.57 и 8.55):

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_1^* \cdot M}{EI} dx &= 0, \\ \sum \int \frac{\bar{M}_1^* \cdot M}{EI} dx &= \frac{1}{6EI} \left(\frac{9}{6} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 4,5 \cdot 9,48 - 21,536 \cdot 9) \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left(\frac{5}{6} (-2 \cdot 9 \cdot 14,49 + 2 \cdot 9 \cdot 15 - 9 \cdot 14,49 + 9 \cdot 15) \right) = \\ &= \frac{-5,796 + 5,738}{EI} = -\frac{0,058}{EI} \end{aligned}$$

Погрешность в пределах допустимых величин, не превышающих 5 %.

8. Строим эюру Q по эюре M , как в методе сил. Для пролета 2-3 (рис. 8.58) найдем сечение в котором поперечная сила $Q = 0$.

Для этого предварительно находим опорные реакции из условия равновесия моментов относительно точки 2.

$$\sum M_2 = 0, \text{ отсюда } R_{32} = \frac{21,536 + 2 \cdot 9 \cdot 4,5}{9} = 11,392 \text{ кН},$$

$$R_{23} = \frac{-21,536 + 2 \cdot 9 \cdot 4,5}{9} = 6,607 \text{ кН}.$$

Далее составляем уравнение для поперечной силы и приравниваем его к нулю:

$$Q_{x0} = R_{23} - q \cdot x_0 = 6,6 - 2 \cdot x_0 = 0, \text{ отсюда } x_0 = 3,3 \text{ м}.$$

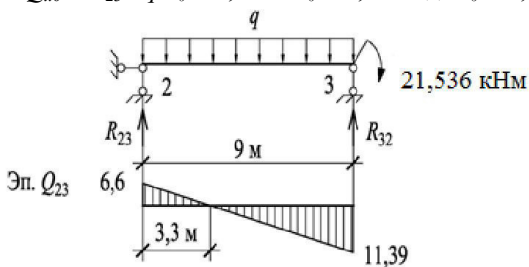


Рис. 8.58

С учетом x_0 находим максимальный изгибающий момент для пролета 2-3:

$$M_{\max} = 6,6 \cdot 3,3 - 2 \cdot 3,3 \cdot 1,65 = 21,78 - 10,89 = 10,89 \text{ кНм}.$$

Изгибающий момент посередине пролета: $x = 4,5$ м:

$$M_{l=4,5} = 6,6 \cdot 4,5 - 2 \cdot 4,5 \cdot 2,25 = 29,731 - 20,25 = 9,48 \text{ кНм}.$$

Аналогичным образом определяем поперечные силы в других стержнях.

Стержень 3-4 (рис. 8.59):

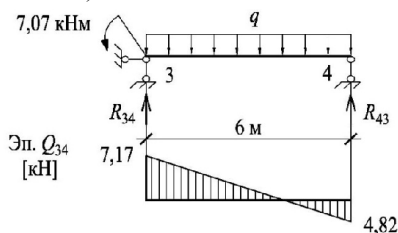


Рис. 8.59

$$R_{43} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 - 7,07}{6} = 4,82 \text{ кН.}$$

$$R_{34} = \frac{36 + 7,07}{6} = 7,17 \text{ кН.}$$

$$M_{x=3} = 7,17 \cdot 3 - 7,07 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 5,44 \text{ кНм.}$$

Стержни 5-3 и 1-2 показаны на рис. 8.60, а, б.

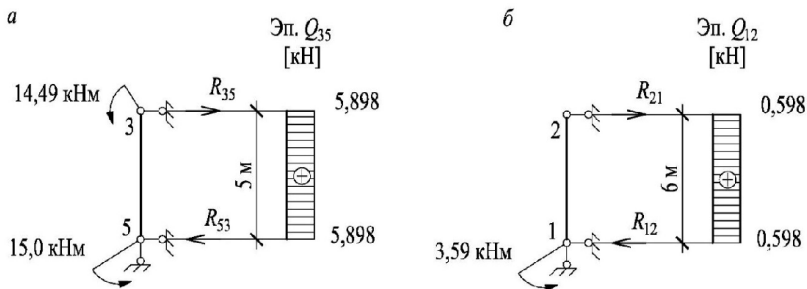


Рис. 8.60

$$R_{21} = \frac{3,59}{6} = 0,598 \text{ кН}; \quad R_{12} = 0,598 \text{ кН} \quad R_{35} = R_{53} = \frac{14,49 + 15}{5} = \frac{29,49}{5} = 5,898 \text{ кН.}$$

На основании полученных эпюр Q для отдельных стержней, строим действительную эпюру Q для заданной рамы (рис. 8.61).

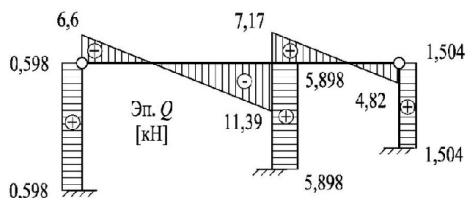


Рис. 8.61

9. По эпюре Q строим эпюру N . Для этого вырезаем из заданной системы узлы сечениями, бесконечно близкими к ним (рис. 8.62). В соответствующих сечениях прикладываем поперечные силы, значения которых берем из эпюры Q (рис. 8.61) и из равновесия узлов определяем продольные силы.

Примечание: если в узле приложена внешняя сила, то ее необходимо учесть при рассмотрении равновесия узла, например узел 2.

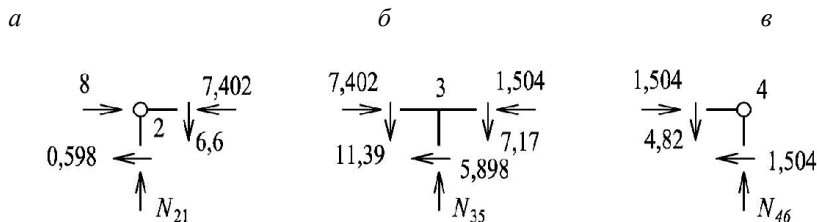


Рис. 8.62

При определении продольных сил в стержнях, сначала рассматриваем равновесие узлов 2 и 4, а затем – узла 3. Знак продольной силы определяется, как и ранее: при растяжении знак «+», при сжатии «-».

Окончательная эпюра продольных сил N представлена на рис. 8.63.

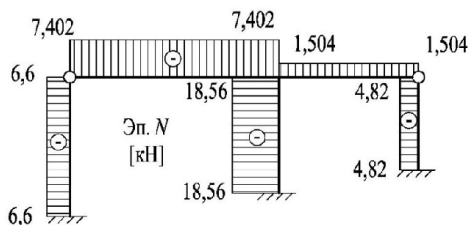


Рис. 8.63

10. Статическая проверка.

Она заключается в том, что любой вырезанный внеопорный узел, любая часть рамы или в целом сама рама под действием всех внешних нагрузок, реактивных усилий должны находиться в равновесии, если задача решена правильно. Условия равновесия для плоской системы сил: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_i = 0$. Вырежем из заданной системы раму сечениями, бесконечно близкими к заданному, и приложим все реактивные усилия и внешнюю нагрузку (рис. 8.64).

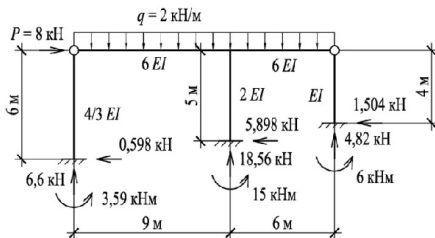


Рис. 8.64

$$\sum M_{(2)} = -0,598 \cdot 6 + 3,59 + 15 - 5,598 \cdot 5 + 6,06 - 1,504 \cdot 4 + 4,82 \cdot 15 + 18,58 \cdot 9 - 2 \cdot 15 \cdot 7,5 = 264135 - 2647 \approx 0,035.$$

$$\sum Y = 6,6 + 18,56 + 4,82 - 2 \cdot 15 = 29,98 - 30 \approx 0,02.$$

$$\sum X = 0,598 + 5,898 + 1,504 - 8 = 8 - 8 = 0.$$

Расхождение мало, допускается до 5 %.

Таким образом, делаем заключение, что задача решена правильно.

Решение рассмотренной задачи в матричной форме

Канонические уравнения метода перемещений (8.2) в матричной форме имеют вид:

$$R\vec{X} + \vec{R}_p = 0.$$

R – матрица жесткости, составлена из коэффициента при неизвестных r_{ik} :

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}.$$

\vec{R}_p – вектор реакций в наложенных связях от нагрузки:

$$\vec{R}_p = \begin{vmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \end{vmatrix}.$$

\vec{X} – вектор искомых перемещений:

$$\vec{X} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}.$$

В случае, если реакции в наложенных связях определяются от единичных внешних нагрузок, $\vec{R}_p = r_p \vec{P}$, где r_p – матрица реакций в наложенных связях от единичных внешних нагрузок, \vec{P} – вектор нагрузок.

$\vec{X} = -R^{-1} r_p \vec{P}$. R^{-1} – обратная матрица, полученная на ЭВМ.

Изгибающие моменты определяем по формуле:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_x,$$

\vec{M} – вектор изгибающих моментов в намеченных сечениях;

\vec{M}_p – вектор изгибающих моментов от внешней нагрузки в сечениях;

\vec{M}_x – вектор изгибающих моментов от действительных смещений и поворотов сечений.

Учитывая $\vec{M}_p = L_p \vec{P}$ и $\vec{M}_x = L_x \vec{X}$, получаем:

$$\vec{M} = L_p \vec{P} + L_x \vec{X} = L_p \vec{P} - L_x \cdot R^{-1} r_p \vec{P} \quad \text{или} \quad \vec{M} = (L_p - L_x \cdot R^{-1} r_p) \vec{P} = L_m \cdot \vec{P}.$$

L_p – матрица, элементы которой представляют собой ординаты изгибающих моментов от внешней единичной нагрузки в намеченных сечениях.

L_x – матрица, элементы которой представляют собой ординаты изгибающих моментов от единичных поворотов и смещений наложенных связей.

R^{-1} – обратная матрица жесткости.

r_p – матрица реакций связей от единичных внешних нагрузок.

Ниже приводится порядок расчета рамы в матричной форме (рис. 8.65), рассмотренной в примере 8.6.

Порядок расчета:

1. Определяем количество неизвестных для рассматриваемой рамы (рис.8.65) по методу перемещений $K = K_1 + K_2 = 1 + 1 = 2$.

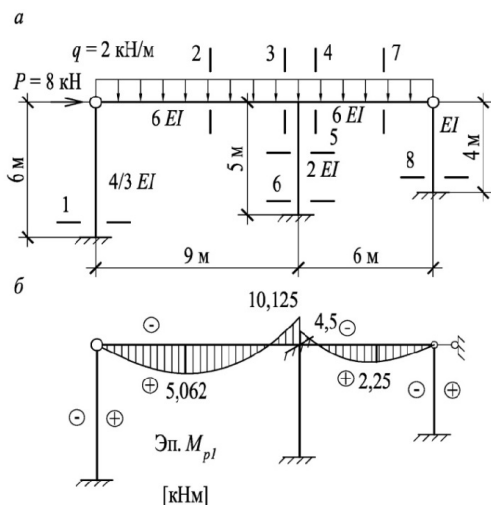


Рис. 8.65

2. Выбираем основную систему. Вводим защемление I и линейную связь II. Основная система представлена выше (рис. 8.38).

3. Составляем матрицу жесткости R . Для этого строим эпюры изгибающих моментов от поворота защемления I (рис. 8.39) на угол $Z_1 = 1$ и смещения связи II (рис. 8.40) на $Z_2 = 1$. По эпюрам находим реактивные усилия r_{11}, r_{12}, r_{22} определение которых рассмотрено в п.4 примера 8.6.

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = EI \begin{vmatrix} 6,6 & 0,48 \\ 0,48 & 0,257 \end{vmatrix}.$$

Примечание: при решении задачи условимся изгибающиеся моменты, изображенные справа от оси стойки и снизу от ригеля, считать положительными, например, как показано на рис.8.65,б.

Для реактивных усилий r_{ik} и R_{ip} знаки принимаем из следующих соображений: если реакция усилия совпадает с принятым направлением перемещения, то знак «+», если не совпадает – «-».

Аналогичным образом составляется матрица r_p .

$$r_p = \begin{vmatrix} r_{1p}^{(1)} & r_{1p}^{(2)} \\ r_{2p}^{(1)} & r_{2p}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5,625 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Примечание: индексы в реактивных усилиях в скобках означают, что первый столбец матрицы r_p получен от нагрузки q , а второй от P .

4. Намечаем расчетные сечения рамы (рис. 8.65, а), таких сечений восемь.

5. Формируем матрицу L_x по эпюрам M_1 (рис. 8.39) и M_2 (рис. 8.40):

$$L_x = EI \begin{vmatrix} 0 & -0,111 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1,6 & 0,48 \\ -0,8 & -0,48 \\ -1,5 & 0 \\ 0 & -0,187 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}.$$

Здесь: 1, 2, ..., 8- номера расчетных сечений.

6. Составляем матрицу моментов от единичных внешних нагрузок « L_p » на основании эпюры изгибающих моментов (рис. 8.65, б), построенной от единичных внешних нагрузок $q = 1$ кН/м и $P = 1$ кН:

$$L_p = EI \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5,062 & 0 \\ -10,125 & 0 \\ -4,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{vmatrix}.$$

7. Формируем матрицу нагрузок:

$$\vec{P} = \begin{vmatrix} q \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. Вносим полученные матрицы в формулу $\vec{M} = (L_p - L_x \cdot R^{-1} r_p) \vec{P}$.

$$M = \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5,062 & 0 \\ -10,125 & 0 \\ -4,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - EI \begin{vmatrix} 0 & -0,111 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 0 \\ 1,6 & 0,48 \\ -0,8 & -0,48 \\ -1,5 & 0 \\ 0 & -0,187 \end{vmatrix} \times \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 0,175 & -0,327 \\ -0,327 & 4,502 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -5,625 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3,59 \\ 9,48 \\ -21,536 \\ -7,07 \\ 14,49 \\ -15 \\ 5,44 \\ -6,06 \end{vmatrix}.$$

9. Строим эпюру изгибающих моментов на основании матрицы M .

10. Выполняем деформационную и статическую проверки (см. п. 6 примера 8.6).

11. Строим эпюру поперечных сил.

12. Строим эпюру продольных сил.

13. Выполняем статическую проверку (см. п. 9 примера 8.6).

Пример 8.8

Для рамы (рис. 8.66) произвести расчет МП. Жесткости стержней EI , нагрузки и размеры известны.

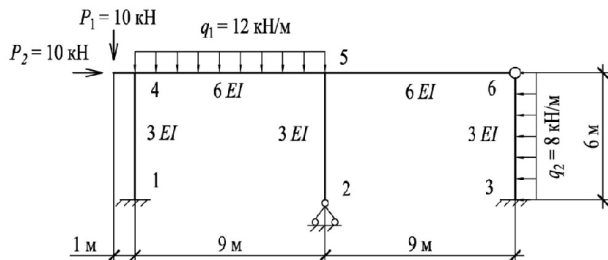


Рис. 8.66

1. Определение степени кинематической неопределимости или количества неизвестных по методу перемещений: $K = K_1 + K_2$. $K_1 = 2$ (количеству жестких внеопорных узлов, такие узлы- 4 и 5 на рис. 8.66).

Для определения числа независимых линейных смещений узлов K_2 заданную раму превращаем в шарнирно-стержневую систему (рис. 8.67, а).

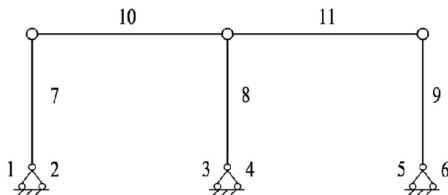


Рис. 8.67

$$K_2 = 2y - C,$$

$y = 6$ (6 узлов), $C = 11$ (опорные стержни – 1, 2, 3, 4, 5, 6, консоль не учитывается), тогда:

$$K_2 = 2 \cdot 6 - 11 = 1; \quad K = K_1 + K_2 = 2 + 1 = 3$$

2. Получение основной системы метода перемещений (ОСМП). Основную систему образуем путем введения двух защемлений в жесткие узлы 4 и 5 и одной линейной связи (стерженька) на уровне ригелей. Линейная связь обозначена цифрой I, защемления обозначены – II и III.



Рис. 8.68

После введения связей рама превращается в совокупность статически неопределимых балок (стержней) двух типов (рис. 8.69).



Рис. 8.69

Стержни 1-4, 4-5 – это стержни с двумя защемленными концами, а стержни 2-5, 5-6 и 6-3 представляют стержни типа б, имеют шарнирное опирание и заделку.

3. Канонические уравнения МП:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0,$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0,$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0.$$

4. Определение коэффициентов при неизвестных: для определения коэффициентов r_{ik} необходимо построить эпюры изгибающих моментов от смещения линейной связи I и поворота защемлений II и III

а) Даем смещение линейной связи I вправо на $Z_I = 1$, при этом сместятся узлы 4, 5, 6, стойки деформируются, и в них возникнут моменты. Ригели 4-5 и 5-6 совершают поступательное перемещение, поэтому в них не возникают моменты. Значение моментов для каждого из стержней берем из таблицы 8.1. Эп. M_1 показана на рис. 8.70, а.

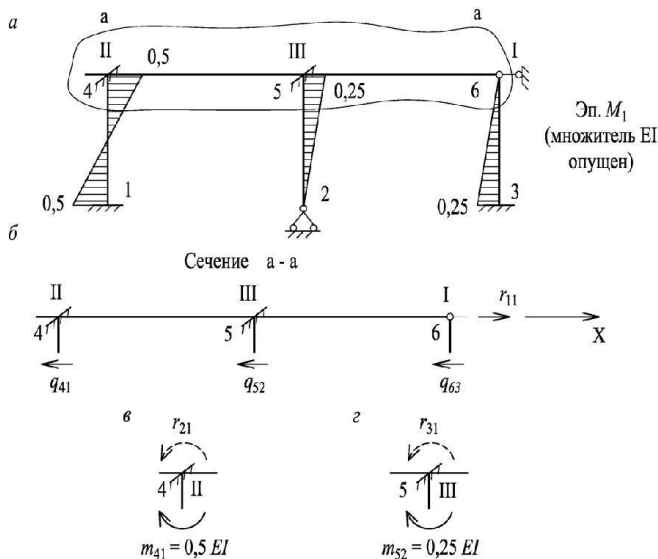


Рис. 8.70

Деформированное состояние стоек после смещения показано штрихами (рис. 8.70, а). Возникшие моменты определяем по табл. 8.1:

$$m_{41} = m_{14} = 6 \frac{EI}{l^2}; \text{ (строка 4 табл. 8.1);}$$

после подстановки соответствующей жесткости и длины стержня 1-4 получаем:

$$m_{41} = m_{14} = 6 \frac{3EI}{6^2} = 0,5EI;$$

$$q_{41} = \frac{m_{41} + m_{14}}{l_{14}} = \frac{(0,5 + 0,5)EI}{6} = \frac{1}{6}EI.$$

Для стержня 2-5, в отличие от табличного, смещается защемленный конец 5 (строка 2), формула из этой строки справедлива, но необходимо скорректировать вид эпюры (растянутая зона справа):

$$m_{52} = 3 \frac{EI}{l^2} = 3 \frac{3EI}{6^2} = 0,25EI;$$

$$q_{52} = \frac{m_{52} + m_{25}}{l_{25}} = \frac{0,25EI}{6};$$

$$m_{36} = 3 \frac{EI}{l^2} - \text{формула} - \text{строка 2 табл.8.1};$$

$$m_{36} = 3 \frac{3EI}{6^2} = 0,25EI;$$

$$q_{63} = \frac{m_{63} + m_{36}}{l_{63}} = \frac{0,25EI}{6}.$$

По эп. M_1 определяем коэффициенты: r_{11} , r_{21} , r_{31} , т. е. усилия по всех введенных связях (I, II, III) от смещения I-связи на 1.

Для определения r_{11} проводим сквозное сечение и рассматриваем равновесие ригеля 4-6.

Из уравнения $\Sigma X = 0$ (рис. 8.70, б) имеем:

$$r_{11} = q_{41} + q_{52} + q_{63},$$

$$r_{11} = \left(\frac{1}{6} + \frac{0,25}{6} + \frac{0,25}{6} \right) EI = \frac{1,5EI}{6} = 0,25EI.$$

Направления поперечных сил q_{ij} можно определить на основе дифференциальной зависимости $Q = \frac{dM}{dx}$, в нашем случае $q = \frac{dM}{dx}$: на участках балки, где эп. M_1 нисходит слева направо, поперечная сила q положительна и вращает оставшуюся часть стержня относительно узла по часовой стрелке. Чтобы определить, нисходит или восходит эп. M_1 на данной стойке, можно представить ее балкой, т. е. горизонтальным стержнем.

В стойках заданной рамы все эпюры M_1 нисходят и q_{ij} направлены влево. Направление q_{ij} можно определить и путем вырезания стержней из M_1 и рассмотрения их равновесия, как в методе сил при построении эп « Q ».

В защемлениях II и III возникают моменты r_{21} и r_{31} , которые определены из равновесия узлов 4 и 5:

$$r_{21} = m_{41} = 0,5EI \text{ (рис. 8.70, в);}$$

$$r_{31} = m_{52} = 0,25EI \text{ (рис. 8.70, г).}$$

б) Сообщаем поворот заземлению II против часовой стрелки на угол $Z = 1$. Изгибающие моменты возникают только в стержнях, примыкающих к поворачиваемому узлу, эпюра M_2 показана на рис. 8.71, а.

$$m_{45} = 4 \frac{EI}{l} \text{ (формула из строки 3 табл. 8.1).}$$

После подстановки соответствующих жесткостей и длины стержней имеем:

$$m_{45} = 4 \frac{6EI}{9м} = 2,666EI ; m_{54} = \frac{m_{45}}{2} = 1,333EI.$$

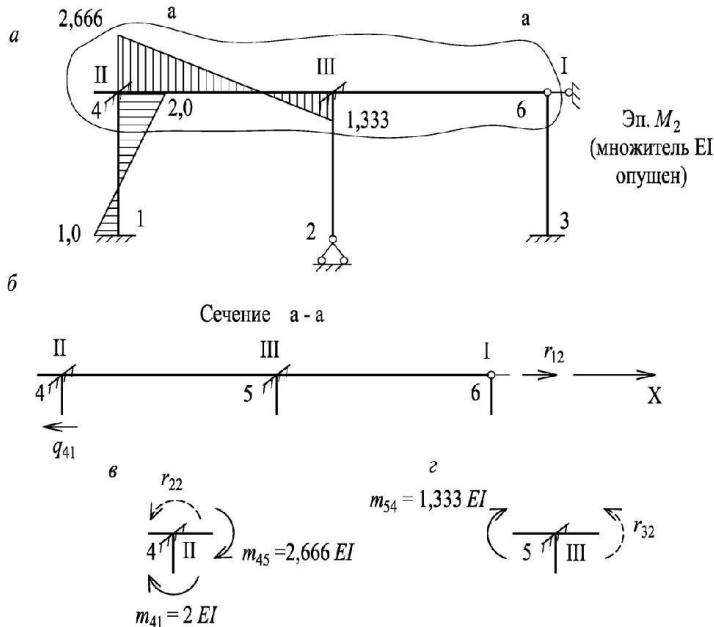


Рис. 8.71

$$m_{41} = 4 \frac{EI}{l} \text{ (табл. 8.1, строка 3);}$$

$$m_{41} = 4 \frac{3EI}{6м} = 2EI; m_{14} = \frac{m_{41}}{2} = EI.$$

По эпюре M_2 определяются коэффициенты: r_{12} , r_{22} , r_{32} , т. е. усилия в связях I, II, III от поворота заземления II.

r_{12} определяется из условия равновесия ригеля и уравнения $\Sigma X = 0$ (рис. 8.71, б).

$$r_{12} = q_{41} ; q_{41} = \frac{m_{41} + m_{14}}{l_{14}} = \frac{2EI + EI}{6м} = 0,5EI;$$

$$r_{12} = 0,5EI.$$

r_{22} определяется из равновесия узла 4 (рис. 8.71, в):

$$r_{22} = m_{41} + m_{45} = 2EI + 2,666EI = 4,666EI.$$

r_{32} – из равновесия узла 5 (рис. 8.71, з):

$$r_{32} = m_{54} = 1,333EI.$$

в) Введенному защемлению III даем поворот против часовой стрелки на $Z_3 = 1$. Эпюры моментов возникают в трех стержнях, примыкающих к поворачиваемому узлу. Эпюра M_3 показана на рис. 8.72, а.

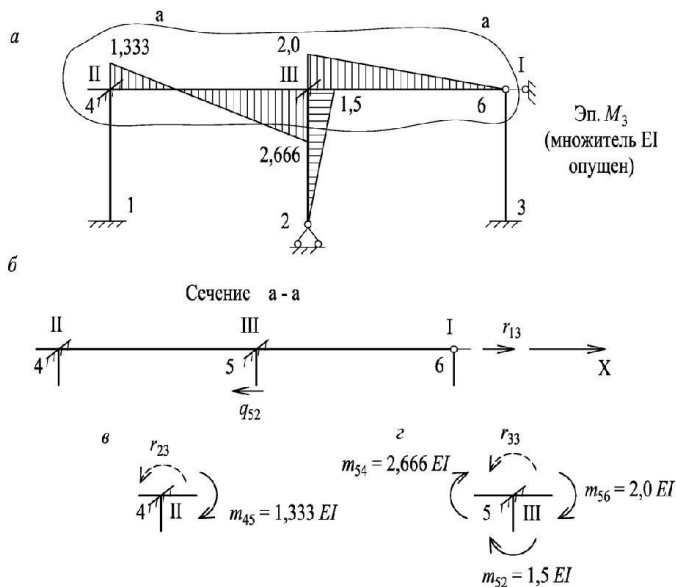


Рис. 8.72

Поясним значения моментов на эп. M_3 :

$$m_{56} = 3 \frac{EI}{l} \text{ (формула – строка 1 табл. 8.1).}$$

После подстановки жесткости стержня 5-6 и его длины имеем:

$$m_{56} = 3 \frac{6EI}{9} = 2EI;$$

$$m_{52} = 3 \frac{EI}{l} \text{ (формула – строка 1, табл. 8.1);}$$

$$m_{52} = 3 \frac{3EI}{6} = 1,5EI;$$

$$m_{54} = 4 \frac{EI}{l} \text{ (строка 3 табл. 8.1);}$$

$$m_{54} = 4 \frac{6EI}{9} = 2,666EI;$$

$$m_{45} = 2 \frac{EI}{l} = \frac{m_{54}}{2} = 1,333EI.$$

По эп. M_3 определяются коэффициенты: r_{13}, r_{23}, r_{33} , т. е. усилия в связях I, II, III от поворота III связи на $Z_{III} = 1$.

r_{13} определяется в соответствии с приведенной методикой (рис. 8.72, б):

$$r_{13} = q_{52} ; q_{52} = \frac{m_{52} + m_{25}}{l_{52}} = \frac{1,5EI + 0}{6} = 0,25EI;$$

$$r_{23} = m_{45} = 1,333EI \text{ (рис. 8.72, в);}$$

$$r_{33} = m_{56} + m_{52} + m_{54} = (2,0 + 1,5 + 2,666)EI = 6,166EI \text{ (рис. 8.72, г).}$$

Во всех случаях необходимо проверять «взаимность» коэффициентов: должны соблюдаться равенства $r_{12} = r_{21}$; $r_{13} = r_{31}$; $r_{23} = r_{32}$.

5. Определение свободных членов уравнений (в литературе встречается термин «грузовые коэффициенты»). Вид эпюр – по табл. 8.2. Грузовая эпюра M_p показана на рис. 8.73. Эпюры возникают только на загруженных стержнях. От узловой нагрузки $P_2 = 10$ кН эпюра не возникает.

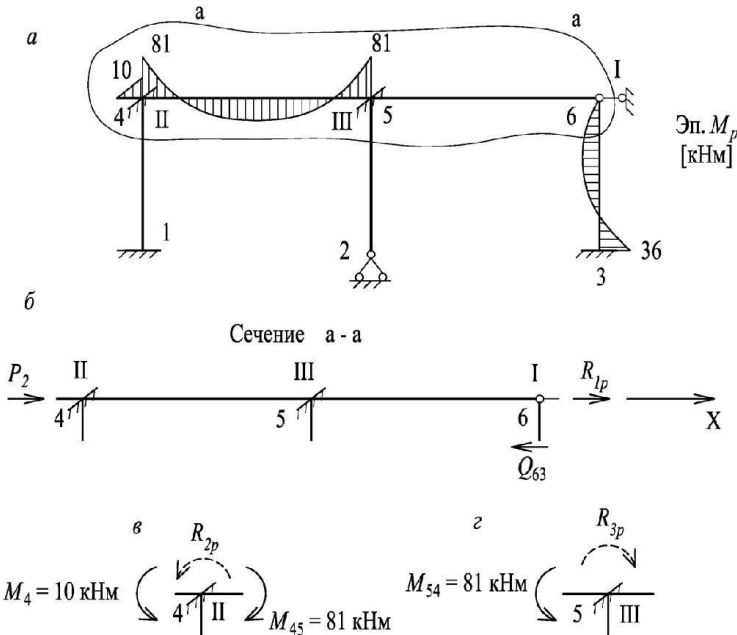


Рис. 8.73

Поясним значения моментов на эп. M_p : на консоли

$M_4 = P_1 \cdot 1 \text{ м} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кНм}, \quad M_{45} = M_{54} = ql^2/12$ (таблица 8.2, строка 3 для стержня с защемленными концами).

После подстановки q и l получаем:

$$M_{45} = M_{54} = \frac{12 \cdot 9^2}{12} = 81 \text{ кНм};$$

$$M_{36} = \frac{q\ell^2}{8} \text{ (формула – строка 1 табл. 8.2)} \quad M_{36} = \frac{8 \cdot 6^2}{8} = 36 \text{ кНм}.$$

Реактивные усилия определяем аналогично тому, как это было сделано при определении коэффициентов r_{ik} , R_{ip} определяется из равновесия ригеля и уравнения $\sum X = 0$:

$$R_{1p} = Q_{63} - P_2 = 18 - 10 = 8 \text{ кН (рис. 8.73, б);}$$

$$Q_{63} = \frac{3}{8}ql = \frac{3}{8} \cdot 8 \cdot 6 = 18 \text{ кН}$$

(табл. 8.2, строка 1 – поперечная сила около шарнира);

$$R_{2p} = M_{45} - M_4 = 81 - 10 = 71 \text{ (рис. 8.73, в);}$$

$$R_{3p} = M_{54} = 81 \text{ кНм (рис. 8.73, г).}$$

Поясним знаки побочных r_{ik} и грузовых коэффициентов R_{ip} . Главные коэффициенты r_{ii} всегда положительны. Побочные коэффициенты принимаются со знаком «+», если направление соответствующих усилий совпадает с направлением главных, если не совпадает, то принимается со знаком «-». Приведем пример: r_{11} направлено вправо, r_{13} – тоже вправо, поэтому $r_{13} = +0,5EI$. $R_{1p} = 8 \text{ кН}$ направлено вправо и r_{11} – вправо, т. е. их направление совпадает с направлением линейного перемещения $Z_1 = 1$.

r_{33} (это момент) направлен против часовой стрелки, а R_{3p} – по часовой, поэтому $R_{3p} = -81 \text{ кНм}$, направление последнего не совпадает с направлением r_{33} .

Аналогично определяются знаки всех коэффициентов.

6. Решение системы уравнений и вычисление неизвестных перемещений $Z_1; Z_2; Z_3$:

$$0,25Z_1 + 0,5Z_2 + 0,25Z_3 + \frac{8}{EI} = 0,$$

$$0,5Z_1 + 4,666Z_2 + 1,333Z_3 + \frac{71}{EI} = 0,$$

$$0,25Z_1 + 1,333Z_2 + 6,166Z_3 - \frac{81}{EI} = 0.$$

Система должна быть симметрична относительно главной диагонали, из решения системы уравнений получаем:

$$Z_1 = -\frac{11,660}{EI}; \quad Z_2 = -\frac{19,031}{EI}; \quad Z_3 = \frac{17,723}{EI}.$$

7. Построение результирующей эпюры, так же как в методе сил (см выше):

$$M = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_3Z_3 + M_p.$$

Желательно для удобства сложения четырех эпюр построить эпюры M_1Z_1 ; M_2Z_2 и т. д. Причем если какое-либо неизвестное получилось со знаком «минус», то ординаты соответствующей эпюры необходимо отложить в противоположную сторону. Эпюры приведены на рис. 8.74, а, б, в.

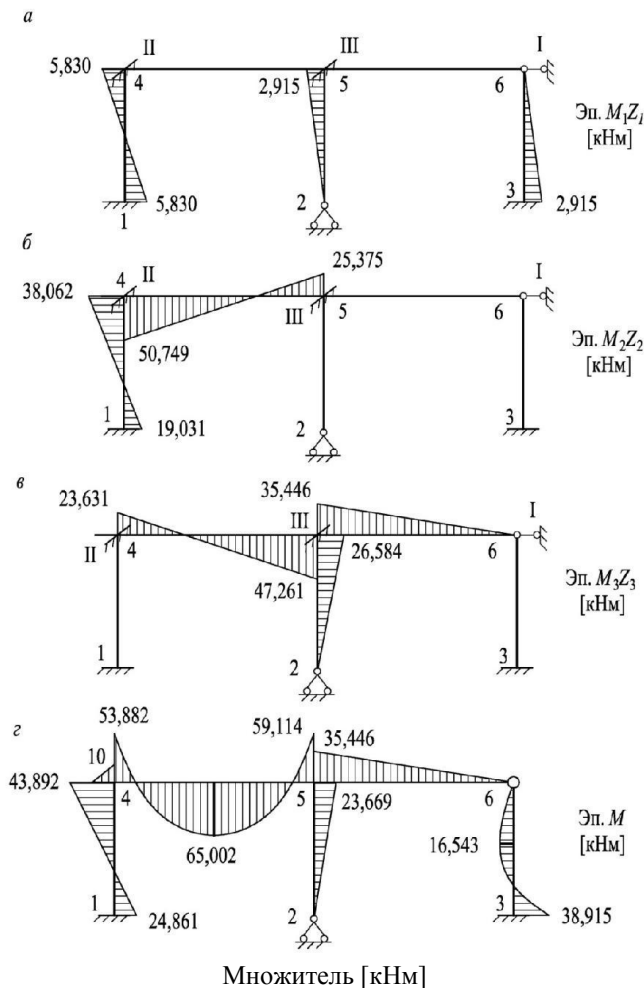


Рис. 8.74

Покажем для примера, как получено значение ординаты

$M_{54} = 59,114$ кНм на эп. M . На эп. M_1Z_1 имеем $M_{54} = 0$;

на эп. $M_2Z_2 - M_{54} = -25,375$ кНм; на эп. $M_3Z_3 - M_{54} = 47,261$ кНм;

на эп. $M_p - M_{54} = -81$ кНм; тогда на эп. M должно быть:

$$M_{54} = 0 - 25,375 + 47,261 - 81 = -59,114 \text{ кНм.}$$

Все ординаты изгибающих моментов отложены в сторону растянутых волокон. Покажем еще, как получена ордината $M_{52} = 23,669 \text{ кНм}$:

на эп. $M_1 Z_1 - M_{52} = 2,915$ (слева от оси стержня);

на эп. $M_2 Z_2 - M_{52} = 0$; на эп. $M_3 Z_3 - M_{52} = 26,584$ – вправо;

на эп. $M_p - M_{52} = 0$.

В итоге: $M_{52} = -2,915 + 26,584 = 23,669$. Здесь ординаты слева от оси стоек условно приняты отрицательными.

8. Выполняем проверку.

а) Статическая – для этого рассматриваем равновесие жестких узлов 4 и 5 (рис. 8.75).

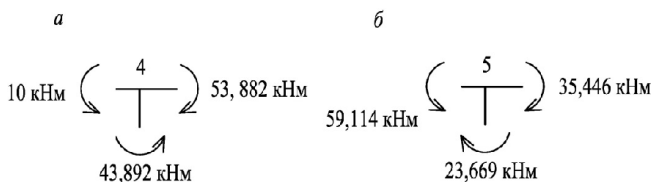


Рис. 8.75

$$\sum M_4 = 10 + 43,892 - 53,882 \approx 0;$$

$$\sum M_5 = 59,114 - 35,446 - 23,669 = 59,114 - 59,115 \approx 0.$$

б) Деформационная проверка производится по основной системе метода сил. Физический смысл этой проверки известен – это определение перемещения, заведомо равного нулю.

Для проверки полученной эпюры M необходимо перейти от заданной рамы (рис. 8.66) к любому варианту основной системы этой рамы метода сил, например, показанного на рис 8.76, а. Неизвестные метода сил показаны на основной системе.

Далее необходимо приложить по направлению отброшенной или перерезанной связи единичное усилие (момент или силу) $X_i = 1$ и построить от усилия единичную эпюру \bar{M}_i , на рис. 8.76, б представлена эпюра изгибающих моментов \bar{M}_4 , от силы $X_4 = 1$, приложенной по направлению отброшенной связи – горизонтального стерженька опоры 2.

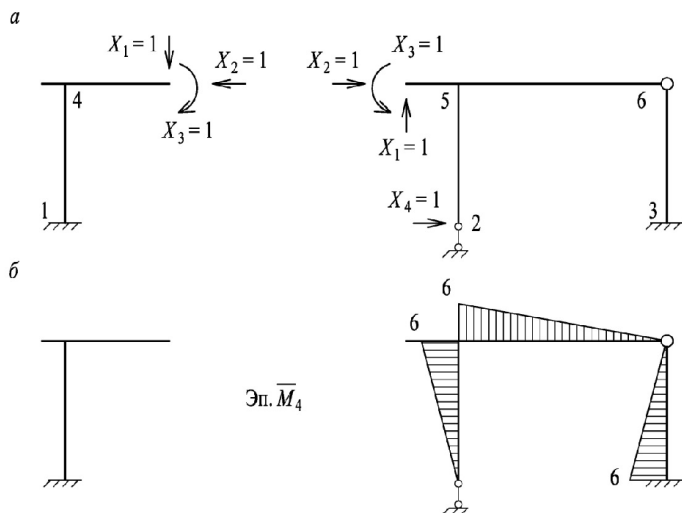


Рис. 8.76

Перемножим эпюру \bar{M}_4 с эпюрой M по формуле: $\sum \int \frac{M\bar{M}_4}{EI} dx$, где \bar{M}_4 – «единичная» эпюра изгибающих моментов, построенная для основной системы метода сил (рис. 8.76, б).

Для выполнения численного расчета по этой формуле необходимо определить моменты посередине пролетов на участках, на которых имеется нагрузка (эти моменты в процессе расчета не были нужны). Покажем определение момента на стержне 4-5, который заменяем балкой на двух опорах, загруженной заданной нагрузкой и концевыми моментами (рис. 8.77).

Для определения момента посередине пролета используем наложение. Для этого строим эпюры моментов отдельно от концевых моментов (эпюра M_m) и от распределенной нагрузки эпюре « Mq ». После этого значение моментов в середине складываем алгебраически, находим M_c . Момент 56,498 получен как средняя линия трапеции, $M_c = 121,5 - 56,498 = 65,002$ кНм.

Аналогично определены остальные пролетные моменты.

После этого выполняем деформационную проверку:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_{рез} \bar{M}_4}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \left[\frac{6}{16} (-2 \cdot 6 \cdot 23,669) + \frac{6}{6} (4 \cdot 3 \cdot 16,543 - 6 \cdot 38,915) \right] + \\ &+ \frac{1}{6EI} \cdot \frac{9}{6} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 35,446 = \frac{-172,516 + 172,51}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Таким образом, действительная эпюра M построена правильно.

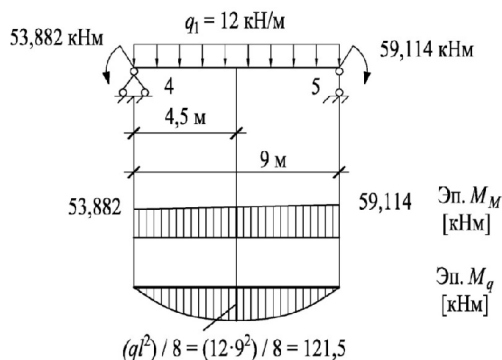


Рис. 8.77

9) Построение эпюры поперечных сил Q .

Эпюра поперечных сил Q строится методом вырезания стержней, известным из расчета рам методом сил. Эп. Q приведена на рис. 8.78.

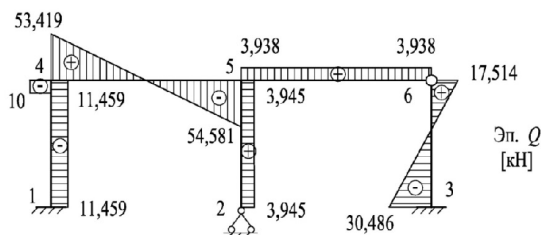


Рис. 8.78

10) Построение эп. продольных сил N известным методом вырезания узлов по эп. Q . Эп. N приведена на рис. 8.79.

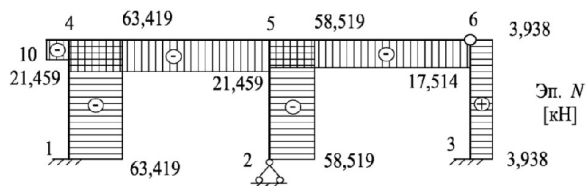


Рис. 8.79

11) Статическая проверка.

Проводим сквозное сечение через стойки 4-1, 5-2, 6-3. Приложим все внутренние усилия в сечениях стержня и внешнюю нагрузку (рис. 8.80).

Запишем статические уравнения: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_4 = 0$.

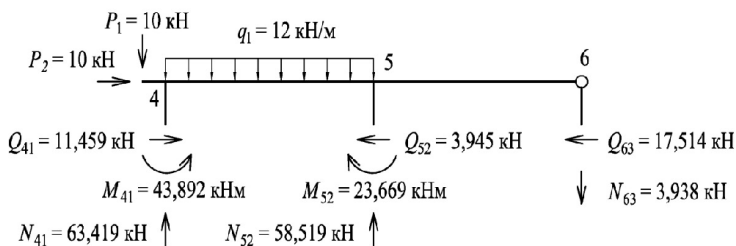


Рис. 8.80

$$\sum X = 10 + 11,459 - 3,945 - 17,514 = 21,459 - 21,459 = 0;$$

$$\sum Y = -10 - 12 \cdot 9 + 63,419 + 58,519 - 3,938 = -121,938 + +121,938 = 0.$$

$$\sum M_4 = 10 \cdot 1 - 12 \cdot 9 \cdot 4,5 - 3,938 \cdot 18 + 58,519 \cdot 9 + 43,892 - 23,669 = -580,553 + 580,563 \approx 0.$$

Пример 8.9

Для рамы (рис. 8.81) построить эпюры внутренних усилий M , Q и N . Нагрузки, длины стержней и их жесткости показаны на рисунке.

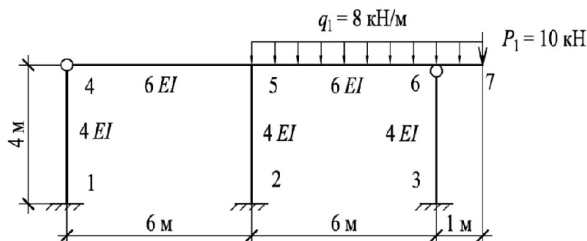


Рис. 8.81

Решение:

1. Для заданной рамы имеем: $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $K = 2$.

На рис. 8.82 показана основная система метода перемещений.

Особенность этой рамы состоит в том, что после введения связей I и II в основной системе МП (рис. 8.82) появляется статически неопределимая балка 5-6 с загруженной консолью 6-7. В таблицах (табл. 8.2) такое нагружение не приводится, поэтому остановимся на построении эп. M_p для этой балки. Эпюра строится на основе принципа независимости действия сил. От нагрузки в пролете $q = 8 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ момент в заделке 5 M_{56}' (рис. 8.83, б) определяется из табл. 8.2 строка 1.

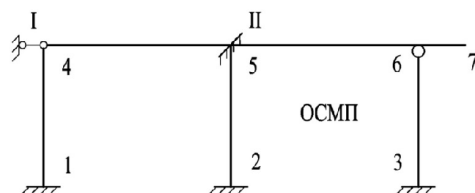


Рис. 8.82

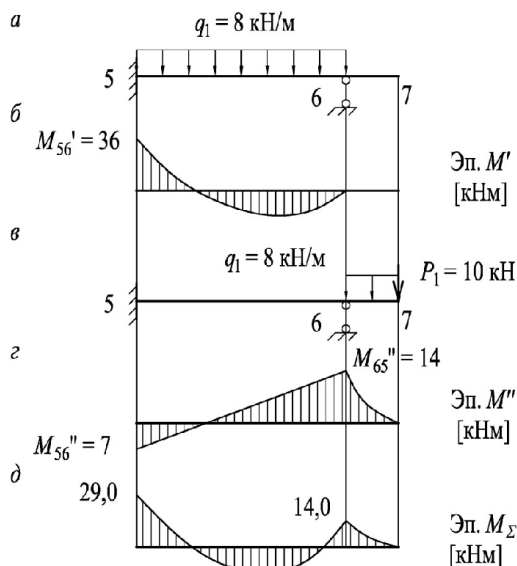


Рис. 8.83

$$M'_{56} = \frac{q \ell^2}{8} = 8 \cdot \frac{6^2}{8} = 36 \text{ кНм.}$$

Момент в сечении над опорой 6 находится как для статически определимой балки:

$$M_{65} = -P_1 \cdot 1 - \frac{q \cdot 1^2}{2} = -10 \cdot 1 - \frac{8 \cdot 1^2}{2} = -14 \text{ кНм.}$$

Момент от нагрузки q на консоли передается в заделку 5, уменьшенный в 2 раза, т. е. $M''_{56} = \frac{14}{2} = 7 \text{ кНм}$ (рис. 8.83, г). Такой же результат получается при расчете балки методом сил, не разделяя внешнюю нагрузку.

Результирующий момент в заделке получается алгебраическим сложением двух значений моментов (рис. 8.83, д): $-36 + 7 = -29 \text{ кНм}$.

Остальные действия проводятся по приведенной в примере 8.7 методике. Покажем их без особых пояснений.

1. Канонические уравнения при $K=2$ имеют вид:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0,$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0.$$

2. Определение коэффициентов при неизвестных канонических уравнений построением эпюр M_1, M_2 .

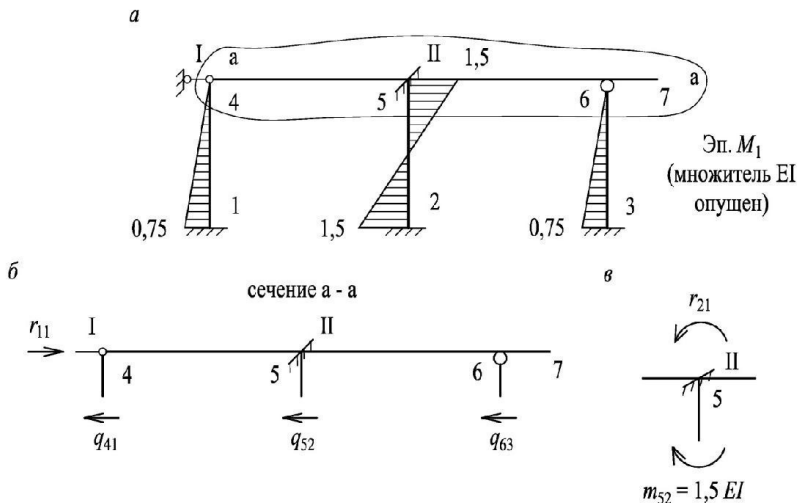


Рис. 8.84

Даем линейные смещения связи $z_1=1$. Эпюра M_1 и определение коэффициентов r_{11}, r_{12} приведены на рис. 8.84, а, б, в

Моменты определяются по известным формулам табл. 8.1:

$$m_{14} = 3 \frac{EI}{l^2} = 3 \frac{4EI}{4^2} = 0,75EI;$$

$$m_{25} = m_{52} = 6 \frac{EI}{l^2} = 6 \frac{4EI}{4^2} = 1,5EI;$$

$$m_{36} = 3 \frac{EI}{l^2} = 3 \frac{4EI}{4^2} = 0,75EI.$$

Поперечные силы:

$$q_{41} = \frac{m_{41} + m_{14}}{l_{14}} = \frac{0 + 0,75EI}{4} = 0,1875EI;$$

$$q_{52} = q_{25} = \frac{m_{52} + m_{25}}{l_{25}} = \frac{(1,5 + 1,5)EI}{4} = 0,75EI;$$

$$q_{63} = \frac{m_{63} + m_{36}}{l_{63}} = \frac{0 + 0,75EI}{4} = 0,1875EI.$$

Реактивные усилия r_{11} определяем из сечения $a-a$ и уравнения $\sum X = 0$ (рис. 8.84, б):

$$r_{11} = q_{41} + q_{52} + q_{63} = (0,1875 + 0,75 + 0,1875)EI = 1,125EI.$$

r_{21} определяется аналогично, из равновесия узла 5, имеющего защемление II (рис. 8.84, в):

$$r_{21} = m_{52} = 1,5EI.$$

б) Даем поворот защемлению $Z_{II} = 1$.

Определяем коэффициенты r_{12} и r_{22} от поворота защемления II против часовой стрелки на $Z_{II} = 1$. Эпюра M_2 и определение коэффициентов r_{22} и r_{12} представлены на рис. 8.85, а, б, в.

$$\begin{aligned} m_{56} &= 3 \frac{EI}{l} = 3 \frac{6EI}{6} = 3EI; \\ m_{52} &= 4 \frac{EI}{l} = 4 \frac{4EI}{4} = 4EI, \quad m_{25} = \frac{m_{52}}{2} = 2EI; \\ m_{54} &= 3 \frac{EI}{l} = 3 \frac{4EI}{4} = 3EI; \\ q_{52} &= \frac{(m_{52} + m_{25})EI}{4} = \frac{4EI + 2EI}{4} = 1,5EI. \end{aligned}$$

r_{12} определяем обычным образом – из сечения а-а и уравнения $\sum X = 0$ (рис. 8.85, б):

$$r_{12} = q_{52} = 1,5EI;$$

r_{22} определяется из равновесия узла 5, в котором введено защемление II (рис. 8.85, в):

$$r_{22} = m_{56} + m_{52} + m_{54} = (3 + 4 + 3)EI = 10EI.$$

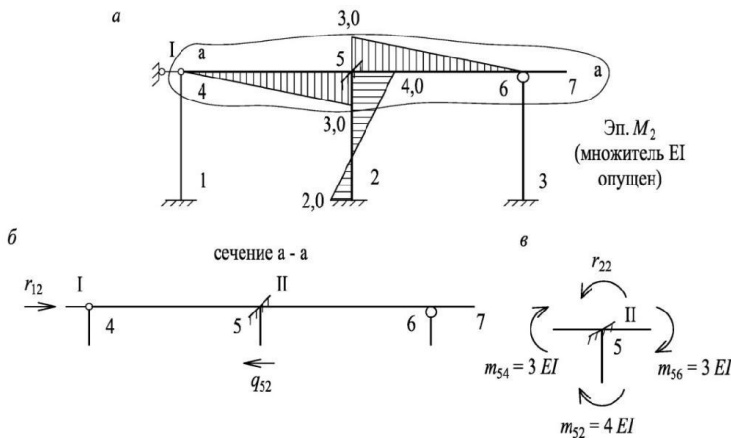


Рис. 8.85

3. Определение свободных членов уравнений.

Эпюра M_p и определение R_{1p} и R_{2p} показаны на рис. 8.86, а, б, в.

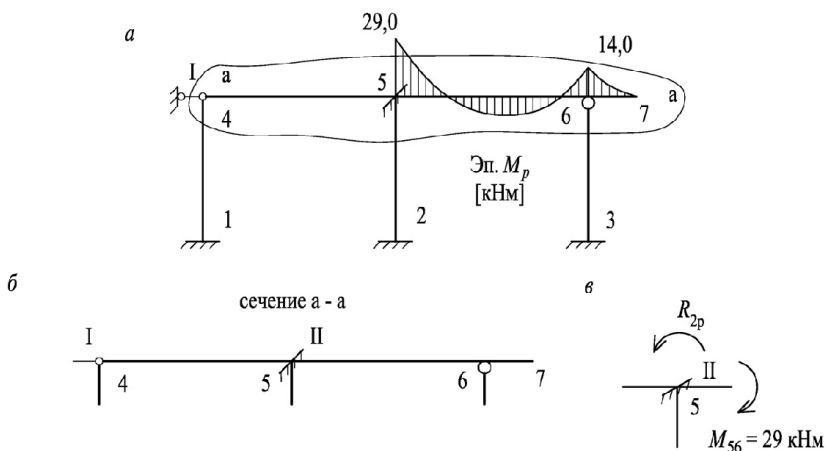


Рис. 8.86

Эпюры возникают на нагруженных стержнях – в данном случае только на стержне 5-6-7.

Построение эп. M_p на стержне 5-6-7 было пояснено на рис. 8.83.

$R_{1p} = 0$, т. к. нет поперечных сил на стойках.

R_{2p} определен из равновесия узла 5 (на рис. 8.86, в):

$$R_{2p} = M_{56} = 29 \text{ кНм.}$$

4. Решение системы уравнений:

$$1,125Z_1 + 1,5Z_2 + 0 = 0,$$

$$1,5Z_1 + 10Z_2 + \frac{29}{EI} = 0.$$

$$z_1 = \frac{4,833}{EI}; \quad z_2 = \frac{-3,625}{EI}.$$

5. Построение результирующей эпюры M :

$$M_{\text{рез}} = M_1Z_1 + M_2Z_2 + M_p.$$

Эпюры M_1Z_1 , M_2Z_2 и $M_{\text{рез}}$ приведены на рис. 8.87, а, б, в.

6. Статическая проверка (рис. 8.88).

Жесткий узел 5 – в равновесии:

$$\sum M_{(5)} = 7,251 + 10,875 - 18,125 = 18,126 - 18,125 \approx 0.$$

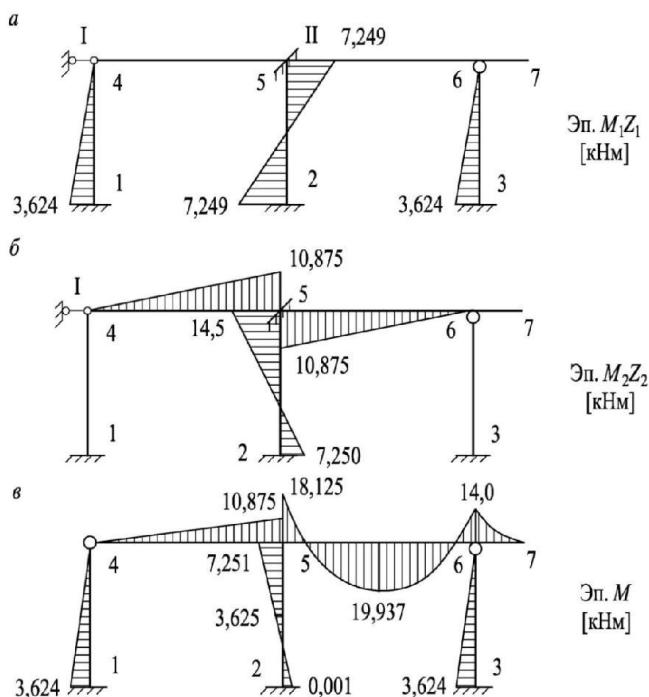


Рис. 8.87

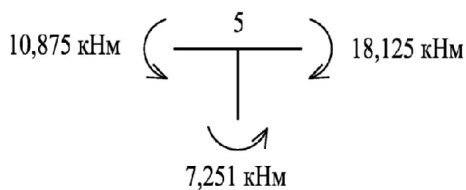


Рис. 8.88

7. Деформационная проверка.

Выполняем, как в методе сил.

Выбранная для этой проверки О.С.М.С., неизвестные метода сил и единичная эпюра \overline{M}_4 показаны на рис. 8.89, а, б, в.

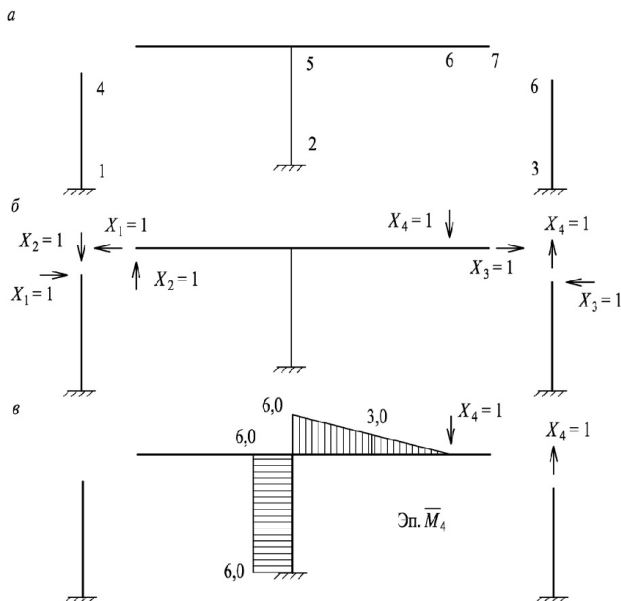


Рис. 8.89

Вариант единичной эпюры изгибающих моментов от силы $X_4 = 1$ представлен на рис. 8.89, в.

$$\sum \int \frac{\bar{M}_4 M}{EI} dx = \frac{6M}{6 \cdot 6EI} (18,125 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \cdot 19,937) + 6 \cdot 4 \cdot \frac{3,625}{EI} = -21,749 + 21,750 \approx 0.$$

8. Эпюры поперечных сил Q и продольных сил N , построенные по известной методике, приведены на рис. 8.90, а, б.

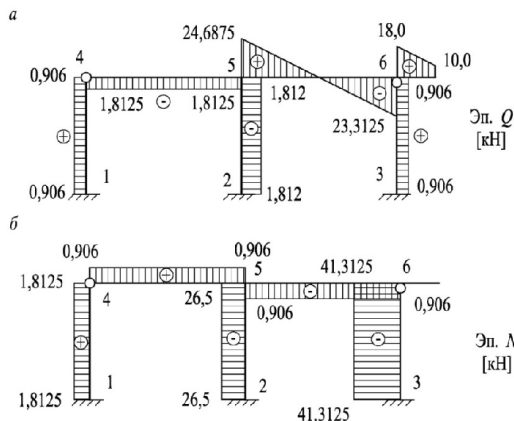


Рис. 8.90

9. Статическая проверка показана на рис. 8.91.

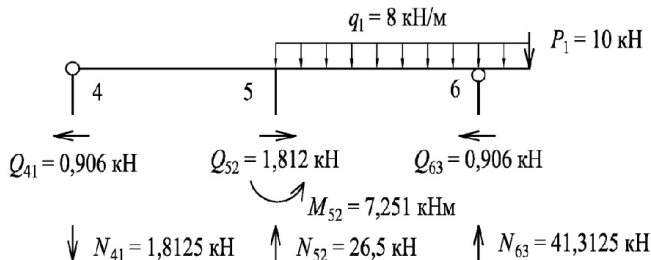


Рис. 8.91

Для проверки составляем уравнения равновесия отсеченной части рамы (рис. 8.91):

$$\sum X = -0,906 + 1,812 - 0,906 = -1,812 + 1,812 = 0;$$

$$\sum Y = -1,8125 - 8 \cdot 7 - 10 + 26,5 + 41,3125 =$$

$$= -67,8125 + 67,8125 = 0;$$

$$\sum M_5 = 1,8125 \cdot 6 + 41,3125 \cdot 6 + 7,251 - 10 \cdot 7 - 8 \cdot 7 \cdot 3,5 =$$

$$= 10,875 + 247,875 + 7,251 - 70 - 196 = 266,01 - 266 \approx 0.$$

Равенство нулю означает, что расчет произведен верно.

Примечание: возможно некоторые неравенства значений не более 5 %.

8.7. Особенности расчета рам с линейно-подвижными узлами при наличии наклонных стоек

Особенность расчета рам с наклонными стойками связана с построением эпюр от единичного смещения линейных связей (стерженьков) и определением усилий в этих связях от этого смещения, а также от заданной нагрузки.

Пример 8.10

Для заданной рамы (рис. 8.92) построить эпюру M .

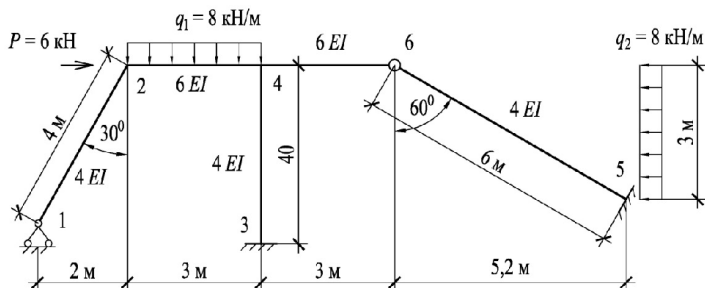


Рис. 8.92

Решение

1. Определение степени кинематической неопределимости: $K_1 = 2$ (два жестких узла 2 и 4) и $K_2 = 1$.

2. Получение основной системы метода перемещений (ОСМП).

В жесткие узлы вводим защемления, которые обозначены II и III (введенные связи обозначаем римскими цифрами, чтобы отличать их от обычных узлов рамы). Линейная связь в таких рамах вводится перпендикулярно одному из стержней, в данном примере линейная связь I поставлена перпендикулярно стойке 3-4 (рис. 8.93).

3. Канонические уравнения метода перемещений при $K=3$ имеют вид:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0,$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0,$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0.$$

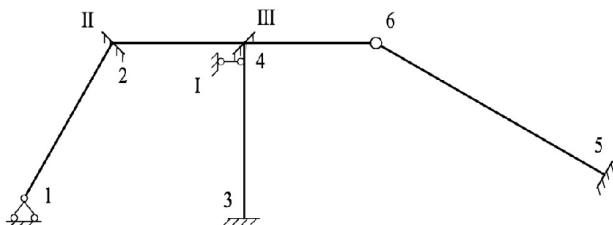


Рис. 8.93

4. Определение коэффициентов при неизвестных r_{ik}

а) Даем линейное смещение связи I на $Z_1 = 1$ вправо, при этом смещаются узлы 4, 6, 2.

Новое положение узлов 2 и 6 можно определить на пересечении дуг, проведенных радиусами длиной соответствующих стержней. Но на практике, учитывая малость перемещений (по сравнению с длинами стержней), новые положения внеопорных узлов определяют не на пересечении дуг, а на пересечении перпендикуляров к стержням. При этом относительные положения узлов определяются построением векторной диаграммы перемещений.

Покажем построение векторной диаграммы для заданной рамы. Вначале выбирается полюс (точка) и с ним совмещаются неподвижные узлы 1, 3, 5. В определенном масштабе из полюса проводим вектор $Z_1 = 1$ и определяем новое положение точки 4 (рис. 8.94). Направление и величину перемещения точки 2 находим, проведя из концов единичного вектора два перпендикуляра к направлениям стержней 2-1 и 4-2. Положение точки 6 найдем, проведя из концов единичного вектора два перпендикуляра к направлениям стержней 6-5 и 4-6.

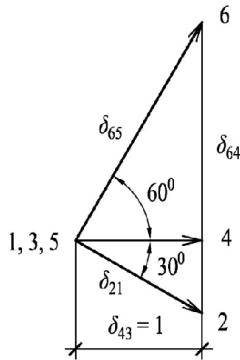


Рис. 8.94

На основании диаграммы определяются относительные поперечные смещения концов стержней:

$$\delta_{21} = 1 / \cos 30^\circ = 1 / \cos 30^\circ = 1,156;$$

$$\delta_{42} = 1 \operatorname{tg} 30^\circ = 0,578;$$

$$\delta_{65} = 1 / \cos 60^\circ = 2,0;$$

$$\delta_{64} = 1 \operatorname{tg} 60^\circ = 1,73.$$

Определяем табличные моменты по концам стержней по табл. 8.1 и их корректируем на величину полученных относительных смещений. При этом необходимо учитывать направление этих смещений при построении эпюры M_1 . Определим моменты по концам стержней с учетом полученных перемещений их концов.

$$m_{42} = m_{24} = (6 EI / l^2) \delta_{42} = (6 \cdot 6EI / 3^2) 0,578 = 2,312 EI;$$

$$m_{21} = (3EI / l^2) \delta_{21} = (3 \cdot 4EI / 4^2) 1,156 = 0,87EI;$$

$$m_{64} = (3 EI / l^2) \delta_{64} = (3 \cdot 6EI / 3^2) 1,73 = 3,46 EI;$$

$$m_{56} = (3EI / l^2) \delta_{56} = (3 \cdot 4EI / 6^2) 2,0 = 0,666 EI;$$

$$m_{34} = m_{43} = (6EI / l^2) \delta_{43} = (6 \cdot 4EI / 4^2) 1,0 = 1,5 EI.$$

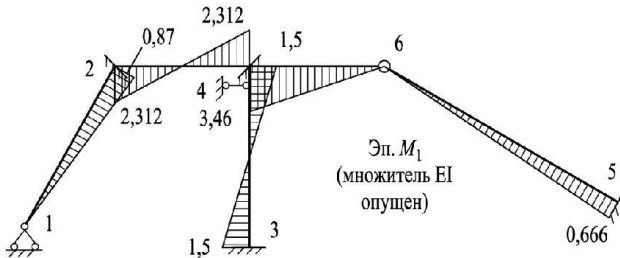


Рис. 8.95

Эпюра M_1 показана на рис. 8.95. Усилие r_{11} во введенной линейной связи можно найти одним из трех способов.

Первый способ связан с рассмотрением равновесия узлов и требует нахождения продольных и поперечных сил в ригелях и стойках.

Рассмотрим равновесие узла 2 (рис. 8. 96).

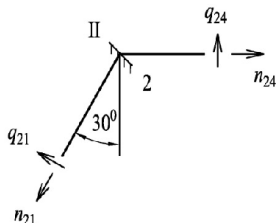


Рис. 8.96

При рассмотрении равновесия узла поперечные силы q найдены обычным образом, т. е. вырезанием стержней 1-2, 2-4:

$$q_{24} = (m_{24} + m_{42}) / l_{24} = (2,312 + 2,312) EI / 3 = 1,54 EI;$$

$$q_{21} = m_{21} / l_{21} = 0,87 EI / 4 = 0,22 EI.$$

Из уравнений $\sum Y = 0$ и $\sum X = 0$ находим: $n_{21} = 1,9$ и $n_{24} = 1,14$ (множитель EI опущен, и в дальнейших формулах – тоже).

Равновесие узла 6 приведено на рис. 8.97.

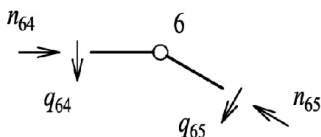


Рис. 8.97

Поперечные силы q в этом узле вычислены следующим образом:

$$q_{65} = (m_{56} + m_{65}) / l_{65} = 0,666 / 6 = 0,111 EI,$$

$$q_{64} = (m_{46} + m_{64}) / l_{64} = 3,46 / 3 = 1,153 EI.$$

Из уравнений $\sum Y = 0$ и $\sum X = 0$ получаем продольные силы:

$$n_{65} = 2,5 EI \text{ и } n_{64} = 2,23 EI.$$

После этого можем рассмотреть узел 4, в котором содержится введенная линейная связь I (рис. 8.98) и определить r_{11} .

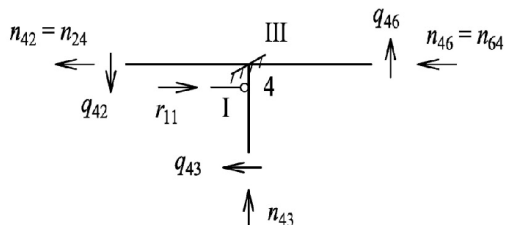


Рис. 8.98

Для рассмотрения равновесия узла 4 определим необходимые поперечные силы из равновесия стержней 4-2, 4-3, 4-6 (рис. 8.95):

$q_{43} = (m_{43} + m_{34}) / \ell_{43} = (1,5 + 1,5) / 4 = 0,75 EI$; q_{24} , q_{46} , а также продольные силы n_{42} и n_{46} известны из предыдущих расчетов.

Из уравнения равновесия узла 4 $\sum X = 0$ получаем:

$$r_{11} = n_{42} + n_{46} + q_{43} = (1,14 + 2,23 + 0,75) = 4,12 EI.$$

Из уравнения $\sum Y = 0$ находим продольную силу в стойке 3-4:

$$n_{43} = q_{42} - q_{46} = 1,54 - 1,153 = 0,387 EI.$$

Эта сила используется в дальнейших расчетах

Второй путь определения r_{11} связан с использованием сквозного сечения по стойкам и уравнения $\sum M_o = 0$, которое позволяет исключить некоторые продольные силы. Проведем сквозное сечение с разрезанием стерженька I и возьмем $\sum M_o = 0$ (рис. 8.99).

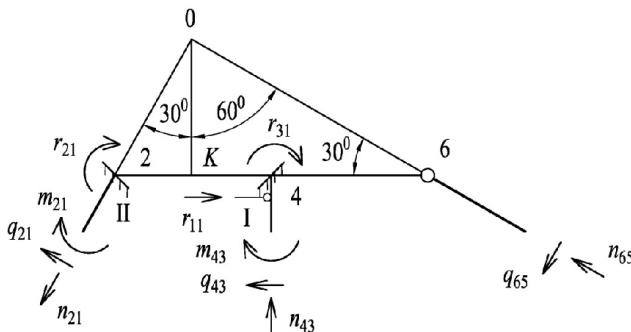


Рис 8.99

В это уравнение войдут еще моменты в стойках и реактивные моменты r_{21} и r_{31} во введенных защемлениях, которые определятся из равновесия узлов 2 и 4 (рис. 8.100).

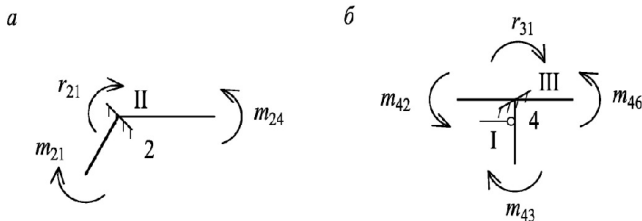


Рис. 8.100

Реакция $r_{21} = m_{24} - m_{21} = (2,312 - 0,87) = 1,442 EI$,

$$r_{31} = m_{46} + m_{42} - m_{43} = (3,46 + 2,312 - 1,5) = 4,272 EI.$$

Составляем уравнение равновесия $\sum M_0 = 0$:

$$r_{11} \cdot OK - q_{43} \cdot OK - q_{65} \cdot (O - 6) - q_{21} (O - 2) + n_{43} \cdot (K - 4) - m_{21} - m_{43} - r_{21} - r_{31} = 0.$$

Длины плеч усилий определяем из геометрии: длина отрезка О-2 равна 3 м; отрезок О-К = $(O-2) \cdot \cos 30^\circ = 2,595$ м; отрезок 2-К равен 1,5 м; отрезок К-4 равен 1,5 м; плечо поперечной силы q_{21} равно 3 м. Плечо поперечной силы q_{65} равно величине отрезка О - 6 и равно 5,19 м.

Величины поперечных сил q в стойках вычислены выше. Подставим в статическое уравнение все числа:

$$r_{11} \cdot 2,595 - 0,75 \cdot 2,595 - 0,111 \cdot 5,19 - 0,22 \cdot 3 + 0,387 \cdot 1,5 - 0,87 - 1,5 - 4,272 - 1,442 = 0.$$

После решения уравнения получаем $r_{11} = 4,12 EI$. Значение коэффициента, вычисленного по этому способу, отличается от первого незначительно. В некоторых случаях этот способ оказывается эффективным.

Третий способ вычисления r_{11} осуществляется посредством интеграла Мора, т. е. «перемножением» эпюры M_1 самой на себя (рис. 8.95).

$$r_{11} = \sum \int M_1 \cdot M_1 dx / EI = 2 \cdot 0,87^2 \cdot 4 / 24 + 2 \cdot 2,312^2 \cdot 3 / 36 + 2 \cdot 3,46^2 \cdot 3 / 36 + 2 \cdot 0,666^2 \cdot 6 / 24 + 2 \cdot 1,5^2 \cdot 4 / 24 = 4,12 EI.$$

В выражениях моментов опущен множитель EI . При перемножении треугольников использована формула трапеций, а для стержней 2-4 и 4-3 – формула Симпсона.

Одним из этих способов определяются усилия в этой же линейной связи – r_{12} и r_{13} по эпюрам M_2 и M_3 , которые приведены на рис. 8.101, 8.102.

б) Определение реактивных усилий от поворота защемления II на угол $Z_2 = 1$, против часовой стрелки. При повороте защемления II в стержнях, примыкающих к узлу 2, возникают изгибающие моменты. По таблице 8.1 находим значения концевых моментов m_{ik} .

$$m_{24} = 4 EI/l = 24EI/3 = 8EI; m_{42} = m_{24}/2 = 8EI/2 = 4EI;$$

$$m_{21} = 3EI/l = 12EI/4 = 3EI.$$

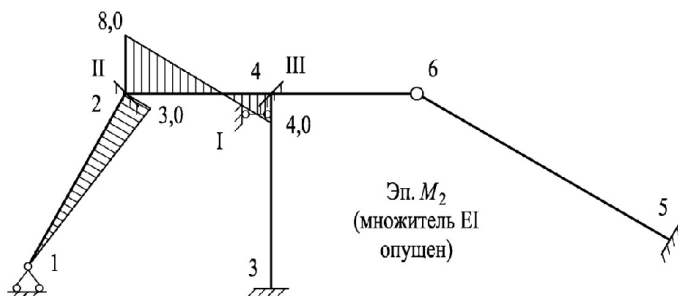


Рис.8.101

По эпюре M_2 определены r_{12} , r_{22} , r_{32} :

$$r_{22} = m_{24} + m_{21} = 8EI + 3EI = 11EI; \quad r_{32} = m_{42} = 4EI.$$

Усилие в линейной связи $r_{12} = -1,44 EI$ определено одним из трех способов определения усилий в линейной связи I (расчет не приведен).

в) Даем поворот защемлению III на угол $Z_3 = 1$. Эпюры возникают только в стержнях, примыкающих к поворачиваемому узлу 4.

Аналогично, по табл. 8.1 находим концевые моменты в стержнях и строим эпюры эпюру M_3 (рис. 8.102):

$$m_{46} = 3 \frac{EI}{l} = 3 \frac{6EI}{3} = 6EI; \quad m_{43} = 4 \frac{EI}{l} = 4 \frac{4EI}{4} = 4EI; \quad m_{34} = \frac{m_{43}}{2} = 2EI;$$

$$m_{42} = 4 \frac{EI}{l} = 4 \frac{6EI}{3} = 8EI; \quad m_{24} = \frac{m_{42}}{2} = 4EI.$$

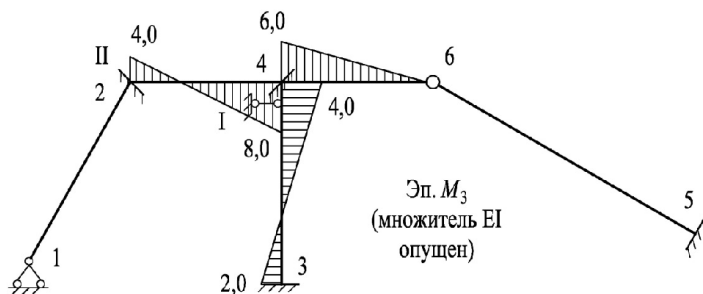


Рис. 8.102

По эпюре M_3 определяем усилия r_{13} , r_{23} , r_{33} .

Определим усилие r_{13} в линейной связи I так же методом вырезания узлов, как и при определении r_{11} . Для этого последовательно рассмотрим равновесие узлов 2, 4 и 6 (рис. 8.103, 8.104, 8.105).

Узел 2

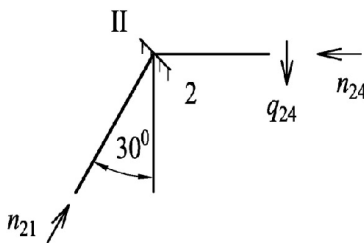


Рис. 8.103

Из уравнения равновесия узла 2 в форме $\sum Y = 0$ имеем:

$$n_{21} \cos 30^\circ - q_{24} = 0,$$

$$q_{24} = \frac{m_{42} + m_{24}}{l_{24}} = \frac{(8+4)}{3} EI = 4EI,$$

$$n_{21} = \frac{q_{24}}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{0,866} EI = 4,62 EI.$$

2) Из уравнения $\sum X = 0$ имеем: $-n_{24} + n_{21} \sin 30^\circ = 0$,
откуда $n_{24} = n_{21} \sin 30^\circ = 4,62 \cdot 0,5 EI = 2,31 EI$.

Рассмотрим узел 6 (рис. 8.104).

Из уравнения равновесия $\sum Y = 0$ и $\sum X = 0$ имеем:

$$-n_{65} \cos 60^\circ + q_{64} = 0; q_{64} = 6/3 EI = 2 EI.$$

$$n_{65} = \frac{2}{0,5} EI = 4 EI.$$

$$\sum X = 0: -n_{64} + n_{65} \sin 60^\circ = 0;$$

$$n_{64} = n_{65} \sin 60^\circ = 4 \cdot 0,865 EI = 3,46 EI.$$

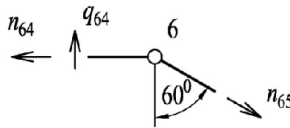


Рис. 8.104

Из равновесия узла 4 (рис. 8.105) находим реактивное усилие r_{13} .

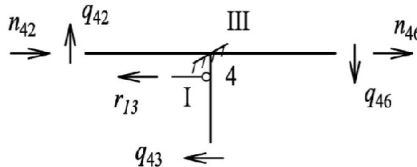


Рис 8.105

$$\sum X = 0 :$$

$$-r_{13} - q_{43} + n_{42} + n_{46} = 0.$$

Откуда $r_{13} = -q_{43} + n_{42} + q_{46} = 0$; в уравнение входит q_{43} , найдем его:

$$q_{43} = \frac{m_{43} + m_{34}}{l_{43}} = \frac{(4 + 2)EI}{4} = 1,5 EI.$$

С учетом найденных значений q_{43} , n_{42} , n_{46} определяем реактивное усилие r_{13} .

$$r_{13} = (-1,5 + 2,31 + 3,46) EI = 4,27 EI.$$

Усилия r_{13} проверяем путем сравнения его с r_{31} , найденным по эпюре M_1 : реактивное усилие $r_{31} = 4,272 EI$ (разница в тысячных), т. е. условие $r_{13} = r_{31}$ выполняется.

Усилия в линейной связи r_{12} и r_{13} можно найти вторым методом — перемножением эпюр: $r_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx$, $r_{13} = \sum \int \frac{M_1 M_3}{EI} dx$ (расчет не приведен).

По эпюре M_3 определяем еще моменты во введенных защемлениях:

$$r_{23} = m_{24} = 4EI \text{ и } r_{33} = m_{42} + m_{46} + m_{43} = 6 + 4 + 8 = 18.$$

Таким образом, определены все коэффициенты при неизвестных.

5. Определение грузовых коэффициентов R_{1p} , R_{2p} , R_{3p} . Для этого строим эпюру M_p (рис. 8.106). По табл. 8.2 находим концевые моменты M_{ik} от внешней нагрузки:

$$M_{24} = M_{42} = \frac{q_1 l^2}{12} = \frac{8 \cdot 3^2}{12} = 6 \text{ кНм}, \quad M_{56} = \frac{q_1 l^2}{8} = \frac{8 \cdot 3^2}{8} = 9 \text{ кНм}.$$

Примечание: момент M_{56} можно определить через длину стержня 5-6, но для этого необходимо спроектировать распределенную нагрузку $q = 8 \text{ кН/м}$ на нормаль к оси этого стержня. Результат будет такой же.

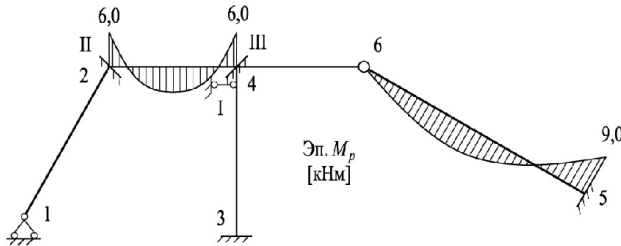


Рис. 8.106

Для определения усилия R_{1p} используем сквозное сечение, проведенное через линейную связь I, и уравнение $\sum X = 0$ для ригеля (рис. 8.107).

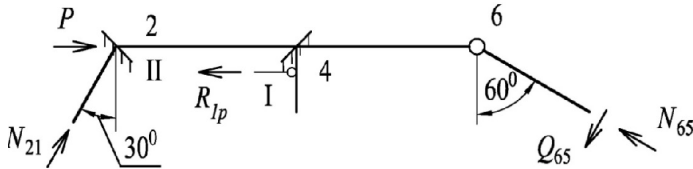


Рис. 8.107

$$N_{21} \sin 30^\circ - R_{1p} + P - Q_{65} \sin 30^\circ - N_{65} \sin 60^\circ = 0.$$

Найдем все входящие в уравнение величины. В это уравнение входит продольная сила наклонной стойки N_{21} . Для определения N_{21} рассматриваем равновесие узла 2 (рис. 8.108, а).

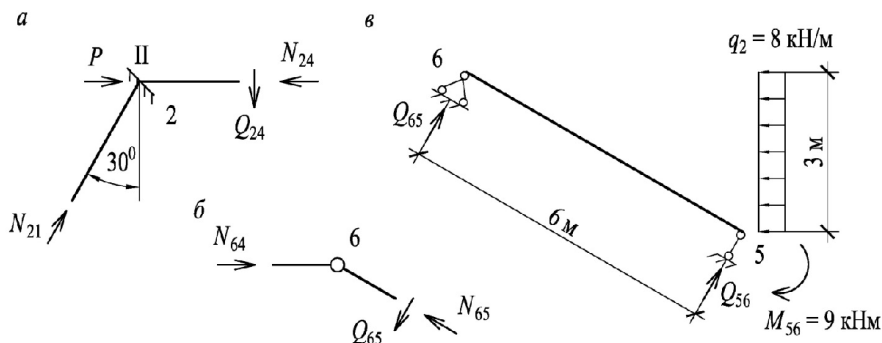


Рис. 8.108

Составляем уравнение равновесия узла 2 в форме $\sum Y = 0$:

$$N_{21} \cos 30^\circ - Q_{24} = 0,$$

откуда

$$N_{21} = Q_{24} / \cos 30^\circ.$$

Так как

$$Q_{24} = ql/2 = 8 \cdot 3/2 = 12 \text{ кН}.$$

И с учетом Q_{24} имеем: $N_{21} = 13,79 \text{ кН}$.

Продольную силу N_{65} в наклонной стойке 6-5 определяем из условия равновесия узла 6: $\sum Y = 0$ (рис. 8.108, б):

$$N_{65} \cos 60^\circ - Q_{65} \sin 60^\circ = 0; \quad N_{65} = (Q_{65} \sin 60^\circ) / \cos 60^\circ.$$

В это уравнение вошла поперечная сила Q_{65} , которая определена методом вырезания стержня 6-5 и показана на рис. 8.108, в.

Из уравнения $\sum M_5 = 0$ имеем:

$$-Q_{65} \cdot 6 - 9 + 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \text{ откуда получаем } Q_{65} = 4,5 \text{ кН}.$$

С учетом Q_{65} продольная сила $N_{65} = 7,785 \text{ кН}$.

С учетом найденных величин уравнение $\sum X = 0$ (рис. 8.107):

$$13,79 \sin 30^\circ - R_{1p} + 6 - 4,5 \sin 30^\circ - 7,785 \sin 60^\circ = 0.$$

После решения получаем $R_{1p} = 3,92 \text{ кН}$.

Покажем определение R_{1p} (рис. 8.107) вторым способом – вычислением интеграла Мора:

$$R_{1p} = - \sum \int \frac{M_1 M'_p}{EI} dx,$$

где M'_p – эпюра, построенная в основной системе метода сил от заданной нагрузки. Основная система метода сил показана на рис. 8.109, а эпюра M'_p – на рис. 8.110.

M_1 – единичная эпюра моментов построенная для основной системы метода перемещений, получена выше (рис. 8.95). Для удобства «перемножения» эпюра M_1 на рис. 8.111 приведена повторно.

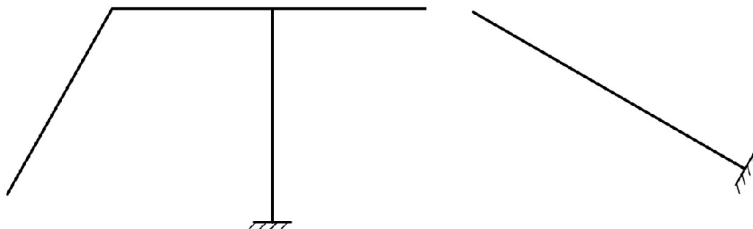


Рис. 8.109

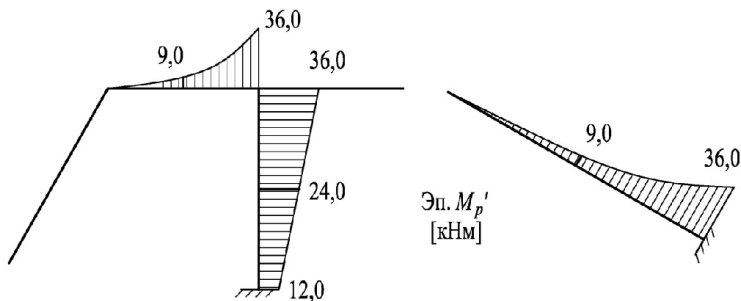


Рис. 8.110

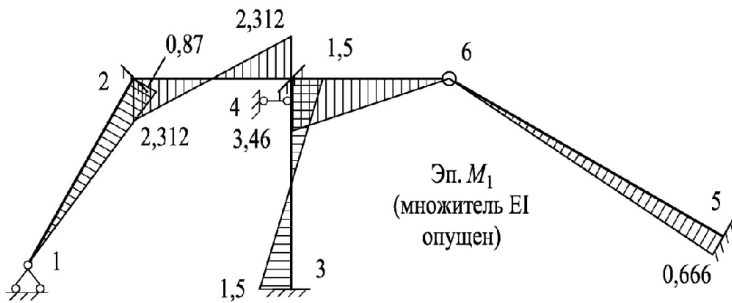


Рис. 8.111

Результат перемножения эпюр:

$$R_{lp} = - \sum \int M_1 M_p' dx / EI = - [(-36 \cdot 0,666 - 4 \cdot 0,333 \cdot 9) 6 / 24EI + (36 \cdot 1,5 + 4 \cdot 24 \cdot 0 - 12 \cdot 1,5) 4 / 24EI + (36 \cdot 2,312) \cdot 3 / 36 EI] = 3,94 \text{ кН.}$$

Значение совпадает со значением, полученным ранее, отличие в сотых. При перемножении эпюр на всех участках использована формула Симпсона.

Коэффициенты уравнения R_{2p} и R_{3p} определяются из равновесия узлов 2 и 4, которые содержат защемления II и III по эпюре M_p (рис. 8.106, а, б).

Вырезанные из эпюры M_p узлы показаны на рис. 8.112 и 8.113.

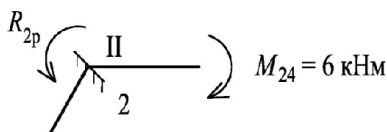


Рис. 8.112

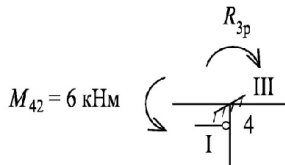


Рис. 8.113

$$\sum M_2 = 0:$$

$$R_{2p} = M_{24} = 6 \text{ кНм}$$

$$R_{3p} = M_{42} = -6 \text{ кНм}$$

Знаки побочных и грузовых коэффициентов устанавливаем по ранее принятому правилу.

6. Решение системы уравнений и вычисление неизвестных перемещений. Для решения используем известные математические методы и стандартные программы.

$$\begin{aligned} 4,12 Z_1 - 1,44 Z_2 - 4,27 Z_3 - 3,92 &= 0, \\ -1,44 Z_1 + 11 Z_2 + 4 Z_3 + 6 &= 0, \\ -4,27 Z_1 + 4 Z_2 + 18 Z_3 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Примечание: (множитель EI опущен) из решения системы уравнений получаем

$$Z_1 = 1,6/EI;$$

$$Z_2 = (-0,65)/EI;$$

$$Z_3 = 0,86/EI.$$

7. Строим результирующую эпюру M действительных изгибающих моментов (рис. 8.114). Значения моментов в сечениях «к» определяем по формуле:

$$M^k = M_p^k + M_1^k Z_1 + M_2^k Z_2 + M_3^k Z_3.$$

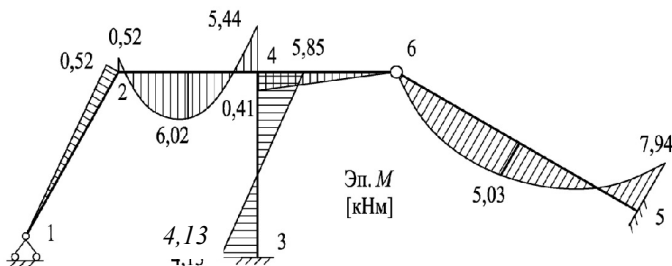


Рис. 8.114

Проверка равновесия жестких узлов 2 и 4 по эпюре M :

$$\text{Узел 2: } M_{21} - M_{24} = 0,52 - 0,52 = 0;$$

$$\text{Узел 4: } 5,44 + 0,41 - 5,85 = 0.$$

8. Деформационная проверка.

Основная система метода сил для деформационной проверки показана на рис. 8.115, а, и вариант «единичной» эпюры, по которой произведена деформационная проверка, – на рис. 8.116.

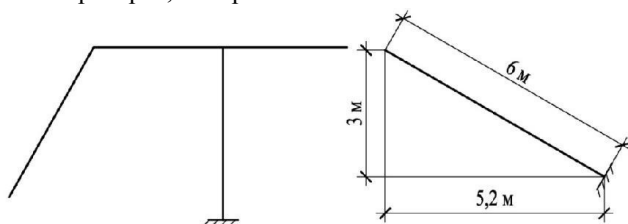


Рис. 8.115

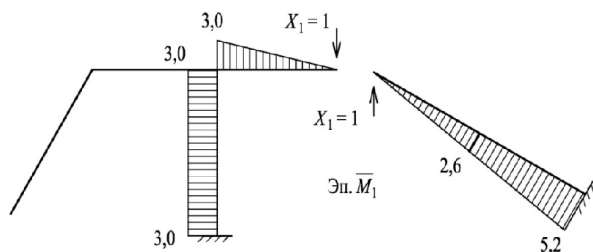


Рис. 8.116

$$\sum \int \frac{M M_1}{EI} dx = \frac{1}{4EI} \left[3 \cdot 4 \cdot (-0.86) + \frac{6}{6} \cdot (4 \cdot 5.03 \cdot 2.6 - 7.94 \cdot 5.2) \right] + \frac{1}{6EI} \times \\ \times \frac{3}{6} (-2 \cdot 0.41 \cdot 3) = \frac{13.078 - 13.107}{EI} \approx 0.$$

Здесь при перемножении эпюр на стойке 3-4 использована формула Верещагина, а на ригеле 4-6 – формула трапеций. Поясним ординату 0,86 на стойке 3-4 (рис. 8.114): она получена как средняя линия «перекрученной» трапеции:

$$\frac{5.85 - 4.13}{2} = 0.86.$$

Деформационная проверка показала правильность расчетов, и эпюра действительных моментов M построена верно.

В данной задаче эпюры « Q » и « N », а также статическая проверка не приведены.

Пример 8.11

Построить эп. M для заданной рамы (рис. 8.117).

Геометрические характеристики:

$$l_{23} = 5 \text{ м}, l_{34} = 6.4 \text{ м}, \sin \alpha = 0.6, \cos \alpha = 0.8, \\ \sin \beta = 0.78, \cos \beta = 0.625, \operatorname{tg} \beta = 5/4 = 1.25.$$

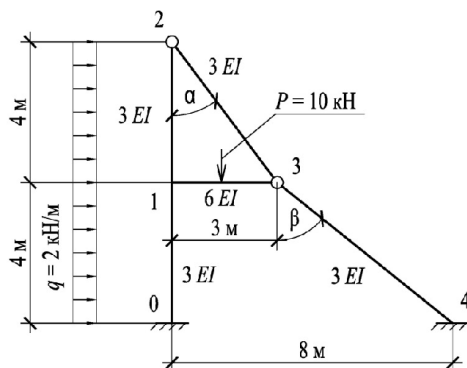


Рис. 8.117

1. Определяем число неизвестных по методу перемещений.

$$K = K_1 + K_2,$$

$K_1 = 1$ – угловое перемещение жесткого узла 1,

$K_2 = 1$ – линейное перемещение жесткого узла 1.

2. Выбираем основную систему (рис. 8.118). Для этого на жесткий внеопорный узел 1 наложим защемление I, а на уровне ригеля 1-3 введем стерженек II, препятствующий линейному смещению узлов 1 и 3.

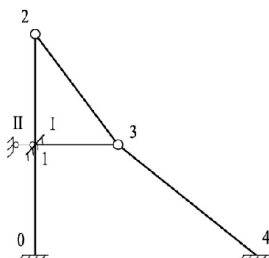


Рис. 8.118

3. Составляем канонические уравнения метода перемещений:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_1 + R_{1p} = 0,$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_1 + R_{2p} = 0.$$

Здесь первое уравнение отрицает наличие реактивного момента в защемлении I, а второе уравнение – реактивного усилия в линейной связи II.

4. Определим коэффициенты при неизвестных (r_{ik}) системы уравнений. Для этого строим эпюру изгибающих моментов:

а) от поворота защемления I на угол $Z_1 = 1$. Значения изгибающих моментов на участках определены по табл. 8.1 и приведены ниже:

$$m_{12} = \frac{3 \cdot EI_{12}}{l_{12}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot EI}{4} = 2,25 \cdot EI;$$

$$m_{13} = \frac{3 \cdot EI_{13}}{l_{13}} = \frac{3 \cdot 6 \cdot EI}{3} = 6 \cdot EI;$$

$$m_{01} = \frac{2 \cdot 3 \cdot EI}{4} = 1,5 \cdot EI;$$

$$m_{10} = \frac{4 \cdot 3 \cdot EI}{4} = 3 \cdot EI.$$

Эпюра изгибающих моментов от поворота защемления на угол $Z_1 = 1$ представлена на рис. 8.119, а.

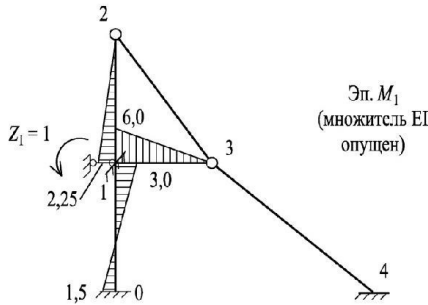


Рис. 8.119

По эпюре M_1 определяем реактивные усилия в связях – коэффициенты r_{11} и r_{21} .

Вырезаем узел 1.

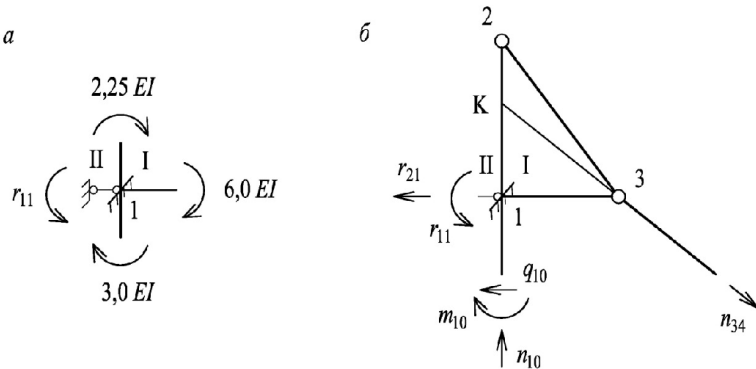


Рис. 8.120

Из равновесия узла 1 находим реактивный момент r_{11} (рис. 8.120, а):

$$r_{11} = (2,25 + 6 + 3)EI = 11,25 EI;$$

Определяем r_{21} . Для этого рассматриваем равновесие верхней части рамы (рис. 8.120, б) и используем уравнение равновесия $\sum M_K = 0$. Это уравнение исключает продольные силы n_{34} и n_{10} . В уравнение входит также r_{11} .

$$l_{k-1} = \frac{3}{\operatorname{tg} \beta} = 3 \cdot \frac{4}{5} = 2,4 \text{ м};$$

$$q_{10} = \frac{m_{10} + m_{01}}{l_{10}} = \frac{(3+1,5)EI}{4} = 1,125 EI.$$

$$\sum M_{(K)} = 0.$$

$$m_{10} + q_{10} \cdot 2,4 - r_{11} + r_{21} \cdot 2,4 = 0.$$

$$r_{21} = \frac{-m_{10} - q_{10} \cdot 2,4 + r_{11}}{2,4} = \frac{-3 - 1,125 \cdot 2,4 + 11,25}{2,4} EI = 2,32 EI.$$

б) От смещения линейной связи II на $Z_{II} = 1$.

Для определения перемещений узлов от единичного смещения линейной связи II строим диаграмму перемещений. Для этого выбираем полюс (точку) и с ним совмещаем неподвижные узлы 0 и 4. В определенном масштабе из полюса проводим вектор $\delta_{10} = Z_1 = 1$ и определяем новое положение узла 1. Направление и величину перемещения узла 3 получаем, проведя из концов единичного вектора два перпендикуляра к направлениям стержней 3-1 и 3-4. На пересечении перпендикуляров находим новое положение узла 3. Для определения нового положения узла 2 проводим перпендикуляр из точки 3 к направлению стержня 2-3 и из точки 1 перпендикуляр к направлению стержня 1-2, на их пересечении находим новое положение точки 2. Диаграмма перемещений приведена на рис. 8.121.

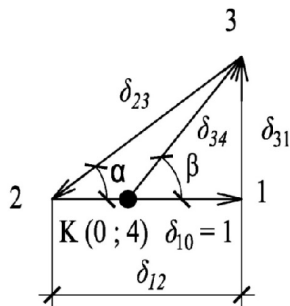


Рис. 8.121

Из диаграммы определим необходимые концевые перемещения:

$$\delta_{31} = 1 \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{5}{4} = 1,25, \quad \delta_{01} = 1,$$

$$\delta_{34} = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{1}{0,625} = 1,6, \quad \delta_{12} = \frac{\delta_{31}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1,25}{0,75} = 1,67.$$

С учетом этих перемещений определяем для стержней по табл. 8.1 моменты и строим эпюру M_2 .

Ниже приведены значения моментов, а на рис. 8.122, а представлена эпюра M_2 .

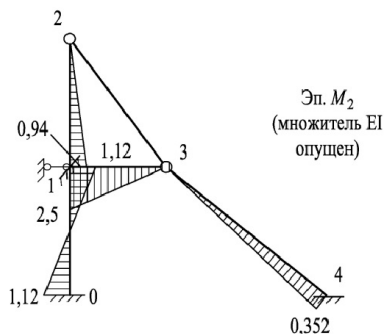


Рис. 8.122

$$m_{12} = -\frac{3 \cdot E \cdot I_{12}}{l_{12}^2} \cdot \delta_{12} = -\frac{3 \cdot 3}{4^2} \cdot 1,67 = -0,94 \cdot E \cdot I,$$

$$m_{10} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{01}}{l_{01}^2} \cdot \delta_{01} = \frac{6 \cdot 3 \cdot E \cdot I}{4^2} \cdot 1 = 1,12 \cdot E \cdot I,$$

$$m_{13} = -3 \cdot \frac{6 \cdot E \cdot I_{13}}{l_{13}^2} \cdot \delta_{13} = -\frac{6 \cdot 3 \cdot E \cdot I}{3^2} \cdot 1,25 = -2,5 \cdot E \cdot I,$$

$$m_{43} = \frac{3 \cdot E \cdot I_{43}}{l_{43}^2} \cdot \delta_{43} = \frac{3 \cdot 3 \cdot E \cdot I}{6,4^2} \cdot 1,6 = 0,352 \cdot E \cdot I.$$

По эпюре M_2 определяем коэффициенты r_{12} и r_{22}

Вырежем узел (1) (рис. 8.123, а).

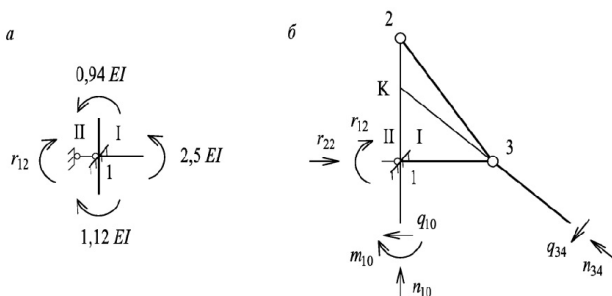


Рис. 8.123

Из равновесия узла I определяем r_{12} :

$$r_{12} = (2,5 + 0,94 - 1,12)EI = 2,32EI;$$

$$r_{12} = -2,32EI.$$

r_{12} принимаем со знаком «минус», т. к. направление этого вектора не совпадает с направлением вектора r_{11} , определенного по эп. M_1 . При этом получили $r_{12} = r_{21}$. Таким образом, условие взаимности побочных коэффициентов выполняется.

Определяем реактивное усилие наложенной связи II от линейного смещения этой же связи на $z_{II} = 1$. Для этого вырезаем верхнюю часть рамы (рис. 8.123, в) сечениями, близкими к узлам, и r_{22} определится из уравнения $\sum M_K = 0$.

$$r_{22} \cdot l_{k1} - q_{34} \cdot l_{k3} - q_{10} \cdot l_{1k} - m_{10} - r_{12} = 0,$$

где

$$l_{k3} = \frac{l_{13}}{\sin \beta} = \frac{3}{0,78} = 3,84;$$

$$q_{10} = \frac{(1,12+1,12)EI}{4} = 0,56EI;$$

$$q_{34} = \frac{m_{34}}{l_{34}} = \frac{0,352EI}{6,4} = 0,055EI;$$

$$l_{34} = \sqrt{(8-3)^2 + 4^2} = 6,4 \text{ м}; l_{1k} = 2,4 \text{ м}.$$

$$r_{22} = \frac{1,12 + 0,56 \cdot 2,4 + 2,32 + 0,055 \cdot 3,84}{2,4} EI = 2,12 EI.$$

5. Определение реактивных усилий от внешней нагрузки.

Моменты в концевых сечениях стержней определяем по табл. 8.2.

$$M_{12} = \frac{q \cdot l_{12}^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{01} = -M_{10} = \frac{q \cdot l_{10}^2}{12} = \frac{2 \cdot 4^2}{12} = 2,67 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{13} = \frac{3 \cdot P \cdot l_{13}}{16} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 3}{16} = 5,62 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюра M_p от внешней нагрузки представлена на рис. 8.124, а.

Для определения реактивного усилия в защемлении I вырезаем узел и из равновесия узла находим R_{1p} (рис. 8.124, б):

$$R_{1p} = 4 + 5,62 - 2,67 = 6,95; R_{1p} = 6,95 \text{ кНм}.$$

Реактивное усилие R_{2p} определяем из условия равновесия отсеченной части рамы (рис. 8.124, в) и уравнения $\sum M_K = 0$:

$$\sum M_K = 0.$$

$$R_{1p} + M_{10} + Q_{10} \cdot 2,4 + q \cdot 4 \cdot 0,4 - R_{2p} \cdot 2,4 - P \cdot 1,5 = 0.$$

$$Q_{10} = 4 \text{ кН}.$$

$$R_{2p} = \frac{6,95 + 2,67 + 4 \cdot 2,4 + 2 \cdot 4 \cdot 0,4 - 10 \cdot 1,5}{2,4} = 3,09 \text{ кН.}$$

Направление R_{2p} не совпадает с направлением r_{22} , поэтому:

$$R_{2p} = -3,09 \text{ кН.}$$

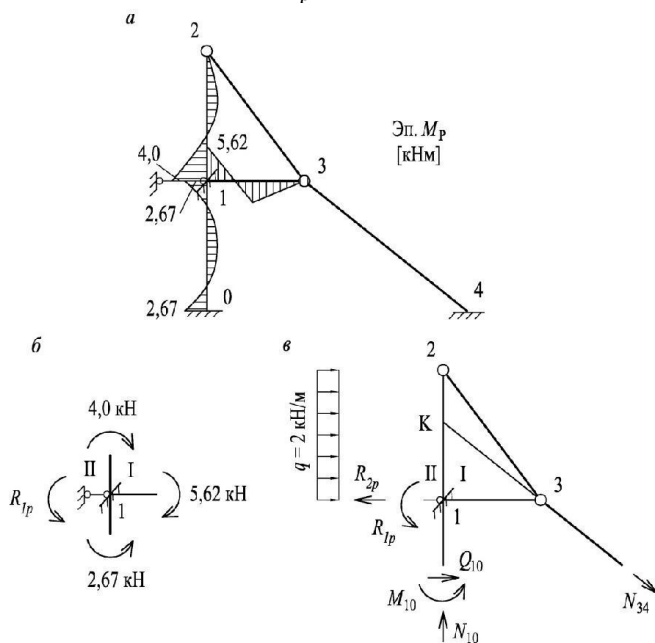


Рис. 8.124

6. Решение системы уравнений.

С учетом найденных коэффициентов канонические уравнения имеют вид (множители EI опущены):

$$11,25 \cdot Z_1 - 2,32 \cdot Z_2 + 6,95 = 0.$$

$$-2,32 \cdot Z_1 + 2,12 \cdot Z_2 - 3,09 = 0.$$

$$Z_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6,95 & -2,32 \\ 3,09 & 2,12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11,25 & -2,32 \\ -2,32 & 2,12 \end{vmatrix}} = \frac{-14,75 + 7,16}{23,9 - 5,38} = \frac{-0,409}{EI}.$$

$$Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 11,25 & -6,95 \\ -2,32 & 3,09 \end{vmatrix}}{18,52} = \frac{34,8 + 16,1}{18,52} = \frac{1,01}{EI}.$$

Проверка решения уравнений:

$$11,25 \cdot (-0,409) - 2,32 \cdot (1,01) + 6,95 = 0$$

$$-2,32 \cdot (-0,409) + 2,12 \cdot (1,01) - 3,09 = 0.$$

7. Выполняем построение эпюры M , действительных изгибающих моментов по формуле:

$$M^k = M_p^k + M_1^k \cdot Z_1 + M_2^k \cdot Z_2.$$

Эпюра M представлена на рис. 8.125, а.

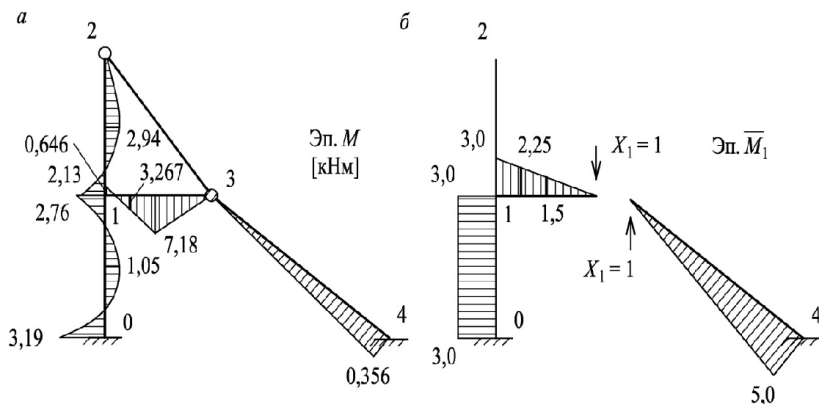


Рис. 8.125

8. Деформационная проверка:

$$\sum \int \frac{M \cdot M_1}{E \cdot I_z} \cdot dx = 0.$$

Эту проверку выполняем, как в методе сил, путем перемножения эп. « M » с эпюрой M_1 основной системы метода сил (рис. 8.125).

Результат «перемножения» эпюр M и \bar{M}_1 приведен ниже.

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \bar{M}_1}{EI} dx = & \frac{1}{3EI} \cdot \frac{4}{6} (3 \cdot 2,76 - 4 \cdot 3 \cdot 1,05 + 3 \cdot 3,19) + \frac{1}{6EI} \left[\frac{1,5}{6} (3 \cdot 0,646 - \right. \\ & - 4 \cdot 3,267 \cdot 2,25 - 1,5 \cdot 7,18) + \frac{1,5}{6} (-2 \cdot 7,18 \cdot 1,5) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6,4}{6} (2 \cdot 5 \cdot 0,356) = \frac{2,430 - 2,489}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Примечание: при перемножении «перекрученной» трапеции [4] на ригеле 1-3 на трапецию с эп. \bar{M}_1 по формуле Симпсона средняя линия найдена, как

$$\frac{-0,646 + 7,18}{2} = 3,267.$$

Пример 8.12

Построить эпюру M для рамы на рис. 8.126, а. Особенность данной схемы состоит в том, что узлы рамы 4 и 5 не имеют линейной подвижности по горизонтали благодаря заделке 1 и неподвижной опоре 2. Но эти узлы могут

перемещаться по вертикали, поэтому в ОСМП введенная линейная связь I препятствует перемещению узлов 4 и 5 по вертикали. В жесткий узел 5 введено заземление (рис. 8.126, б).

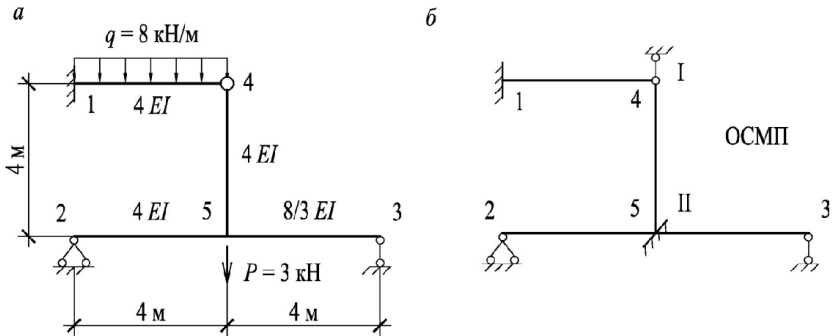


Рис. 8.126

Эпюра M_1 и определение коэффициентов r_{11} и r_{21} приведены на рис. 8.127, а.

Поясним эпюру M_1 и величины моментов. От линейного смещения вниз введенной линейной связи I эпюры возникают в ригелях 1-4, 2-5 и 5-3 (рис. 8.127, а), моменты определяем по табл.8.1

$$m_{14} = \frac{3E \cdot I}{l^2} = \frac{3 \cdot 4E \cdot I}{4^2} = 0,75E \cdot I;$$

$$m_{52} = \frac{3E \cdot I}{l^2} = 0,75E \cdot I;$$

$$m_{53} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3(8/3)EI}{4^2} = 0,5EI.$$

Усилие в линейной связи r_{11} определяется из вырезанной части (рис. 8.127, б) и уравнения равновесия $\sum Y = 0$:

$$r_{11} = q_{41} + q_{52} + q_{53} = \left(\frac{0,75}{4} + \frac{0,75}{4} + \frac{0,5}{4} \right) \cdot E \cdot I = 0,5E \cdot I.$$

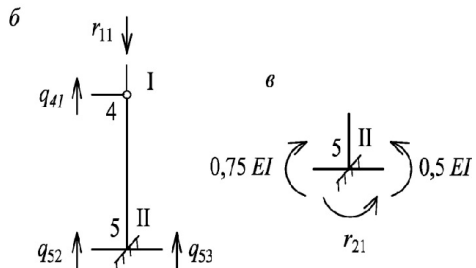
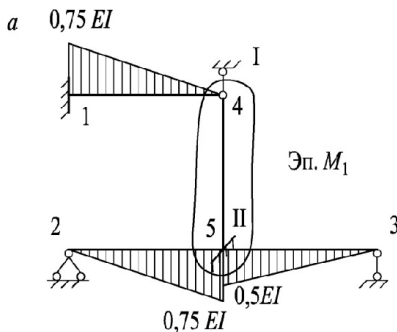


Рис. 8.127

Момент в защемлении II (рис. 8.127, в) равен

$$r_{21} = m_{52} - m_{53} = (0,75 - 0,5) \cdot E \cdot I = 0,25E \cdot I.$$

Эпюра M_2 и определение коэффициентов r_{22} и r_{12} приведены на рис. 8.128. Ординаты эпюры M_2 вычислены по следующим формулам (табл. 8.1, строка 1):

$$\begin{aligned} m_{52} &= \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{4} = 3EI, \\ m_{53} &= \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot (8/3)EI}{4} = 2EI, \\ m_{54} &= \frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 4EI}{4} = 3EI. \end{aligned}$$

Реактивное усилие r_{12} определено из равновесия части рамы 4-5 (рис. 8.128, б) и уравнения

$$\sum Y = 0: r_{12} = q_{52} - q_{53},$$

где

$$\begin{aligned} q_{52} &= \frac{m_{52}}{4} = \frac{3E \cdot I}{4} = 0,75E \cdot I, \\ q_{53} &= \frac{m_{53}}{4} = \frac{2E \cdot I}{4} = 0,5E \cdot I \end{aligned}$$

С учетом q_{52} , q_{53} определяется реактивное усилие

$$r_{12} = (0,75 - 0,5) E \cdot I = 0,25E \cdot I.$$

Из уравнения равновесия узла 5 (рис. 8.128, в), $\sum M_{(5)} = 0$, находим

$$r_{22} = m_{54} + m_{52} + m_{53} = 3E \cdot I + 3E \cdot I + 2E \cdot I = 8E \cdot I.$$

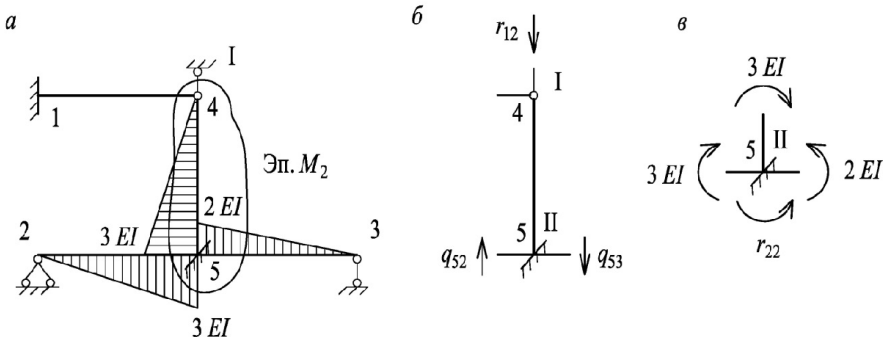


Рис. 8.128

Эпюра M_p и определение свободных членов R_{1p} и R_{2p} показаны на рис. 8.129.

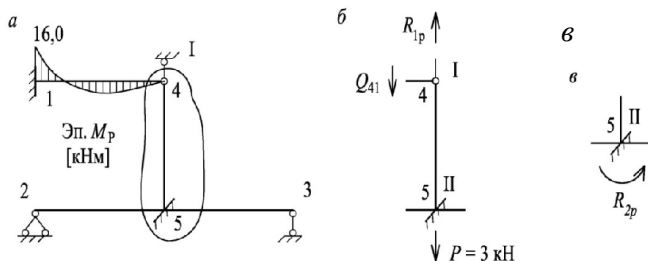


Рис. 8.129

R_{1p} определяется из вырезанной части 4-5 и уравнения $\sum Y = 0$:

$$R_{1p} = Q_{41} + P = 12 + 3 = 15 \text{ кН},$$

причем этому свободному члену уравнения присваивается знак «минус», т. к. направление усилия R_{1p} не совпадает с направлением r_{11} . $R_{2p} = 0$ — из равновесия узла 5. $Q_{41} = \frac{3}{8}ql = \frac{3}{8} \cdot 8 \cdot 4 = 12$ (поперечная сила около шарнира) (табл. 8.2, строка 1).

Решаем систему уравнений:

$$0,5 \cdot Z_1 + 0,25 \cdot Z_2 - \frac{15}{E \cdot I} = 0,$$

$$0,25 \cdot Z_1 + 8 \cdot Z_2 = 0,$$

откуда $Z_1 = \frac{30,476}{E \cdot I}$; $Z_2 = \frac{-0,9524}{E \cdot I}$.

Резльтирующая эпюра действительных моментов M приведена на рис. 8.130, а, на рис. 8.130, б приведена «единичная» эпюра метода сил, по которой выполнена деформационная проверка, путем перемножения эпюры M и \overline{M}_1 .

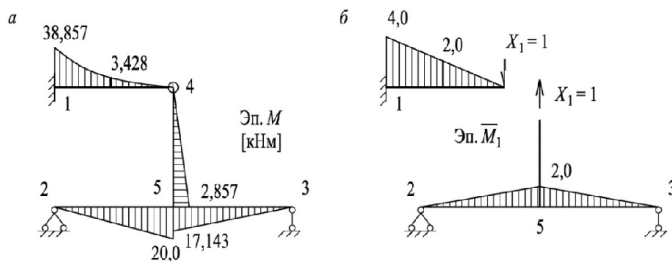


Рис. 8.130

$$\sum \int \frac{M \overline{M}_1}{EI} \cdot dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (4 \cdot 38,857 - 4 \cdot 2 \cdot 3,428) + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 20 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{1}{\frac{8}{3EI}} \cdot \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 17,143) = 30,475 - 30,475 = 0.$$

Деформационная проверка проходит, эпюра «М» построена правильно.

8.8. Использование симметрии при расчете симметричных систем

8.8.1. Общие понятия

При расчете симметричных систем любую нагрузку (рис. 8.131, а) можно разложить на симметричную нагрузку (рис. 8.131, б) и кососимметричную (рис. 8.131, в). В литературе также используется термин «обратно симметричная».

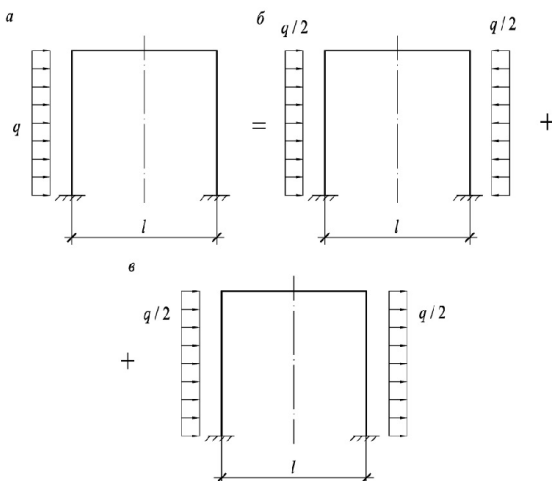


Рис. 8.131

Расчет симметричной системы с симметричной нагрузкой можно свести к расчету половины рамы, введя «ползуны» на оси симметрии в точках пересечения ригелей с осью симметрии (рис. 8.132, а).

Расчет симметричной рамы на кососимметричную нагрузку сводится к расчету схемы с шарнирно-подвижными опорами, введенными в точках пересечения ригелей с осью симметрии (рис. 8.132, б).

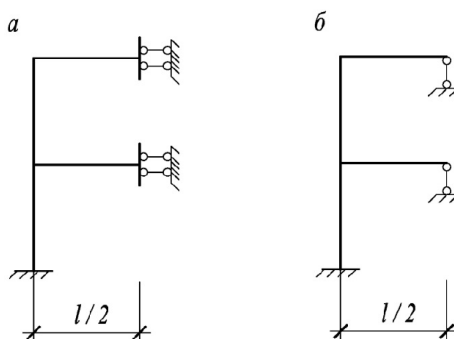


Рис. 8.132

Пример 8.13

Построить эпюру M для однопролетной симметричной рамы, изображенной на рис. 8.133.

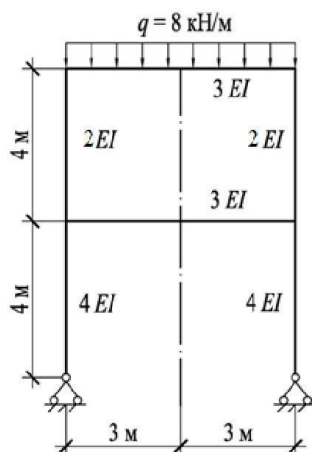


Рис. 8.133

Расчетную схему выбираем в виде половины рамы, приведенной на рис. 8.134, *а*. Основная система получается введением только двух защемлений – I и II – и показана на рис. 8.134, *б*.

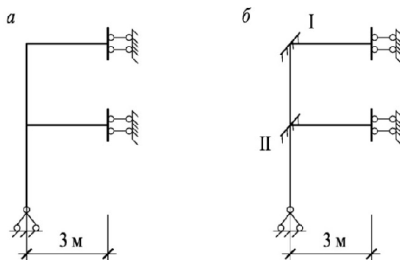


Рис. 8.134

Далее расчет ведется по известной методике без особых пояснений. Эпюра M_1 показана на рис. 8.135.

На эпюре M_1 ординаты вычислены по следующим формулам таблицы 8.1:

$$m_{12} = m_{21} = \frac{EI}{l} - \text{это формула для балки с ползуном} - \text{строка 5 табл. 8.1.}$$

После подстановки соответствующих жесткости и длины получаем:

$$m_{12} = \frac{3EI}{3} = EI,$$

$$m_{13} = \frac{4EI}{l} = \frac{4 \cdot 2 \cdot EI}{4} = 2EI,$$

на противоположном конце момент в 2 раза меньше и равен EI .

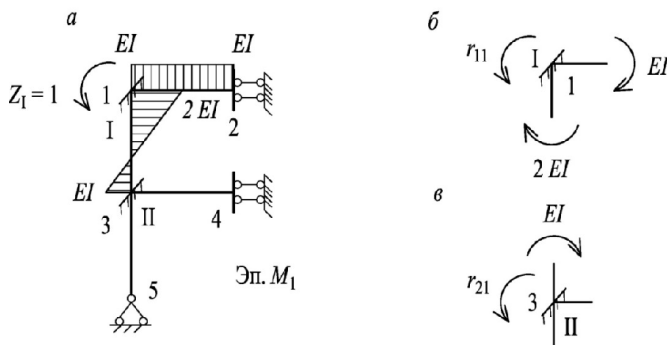


Рис. 8.135

r_{11} определяем из равновесия узла 1: $r_{11} = m_{12} + m_{13} = E \cdot I + 2E \cdot I = 3E \cdot I$; (рис. 8.135, б) по эпюре M_1 также определяем коэффициент r_{21} из равновесия узла 3: $r_{21} = EI$ – показано на рис. 8.135, в.

Эпюра M_2 и определение коэффициентов r_{22} и r_{12} показаны на рис. 8.136, а и 8.136, б, в.

Моменты на эпюре M_2 определены по следующим формулам: по формуле для балки с ползуном:

$$m_{34} = m_{43} = \frac{EI}{l}.$$

С учетом жесткости и длины стержня получаем:

$$m_{34} = m_{43} = \frac{3EI}{3} = EI.$$

$$m_{31} = \frac{4E \cdot I}{l} = \frac{4 \cdot 2 \cdot E \cdot I}{4} = 2E \cdot I; \quad m_{13} = E \cdot I;$$

$$m_{35} = \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{3 \cdot 4 \cdot E \cdot I}{4} = 3E \cdot I.$$

Коэффициент $r_{22} = m_{34} + m_{31} + m_{35} = E \cdot I + 2E \cdot I + 3E \cdot I = 6E \cdot I$; $r_{12} = m_{13} = E \cdot I$,
определение этих коэффициентов приведено на рис. 8.136 б, в.

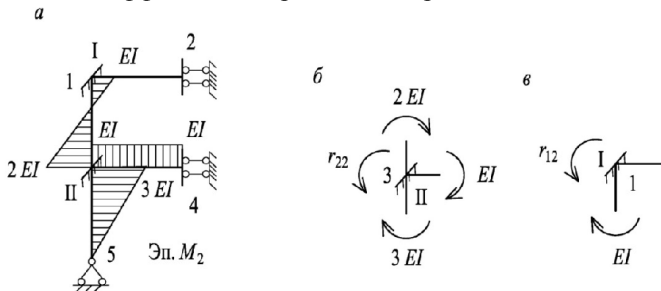


Рис. 8.136

Грузовая эпюра M_p и определение свободных членов R_{1p} , R_{2p} показаны на рис. 8.137. Для эпюры на нагруженном стержне 1-2 использованы формулы для ползуна – строка 5 из табл. 8.2:

$$M_{12} = \frac{ql^2}{3} = \frac{8 \cdot 3^2}{3} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{21} = \frac{ql^2}{6} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad R_{1p} = M_{12} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad (\text{рис. 8.137, б}).$$

Из равновесия узла 3, в который введено защемление II, имеем, что $R_{2p} = 0$. Физический смысл всех коэффициентов канонических уравнений в данном случае – это моменты во введенных защемлениях.

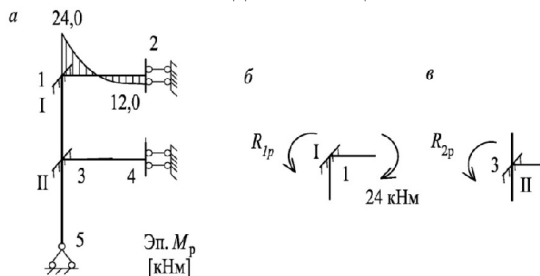


Рис. 8.137

Далее, решая систему уравнений, получаем величины неизвестных:

$$3 \cdot Z_1 + Z_2 + \frac{24}{E \cdot I} = 0, \quad Z_1 + 6 \cdot Z_2 + 0 = 0,$$

$$Z_2 = \frac{1,4117}{EI}; \quad Z_1 = -\frac{8,47}{EI};$$

Эпюры $M_1 \cdot Z_1$, $M_2 \cdot Z_2$ приведены на рис. 8.138, а результирующая эпюра M для рамы в целом – на рис. 8.139. Все жесткие узлы – в равновесии, что служит одним из признаков правильности расчета. Для полноты проверки необходимо также сделать деформационную проверку (не приведена), как в примерах выше, рассмотренных в методе сил и в данной главе.

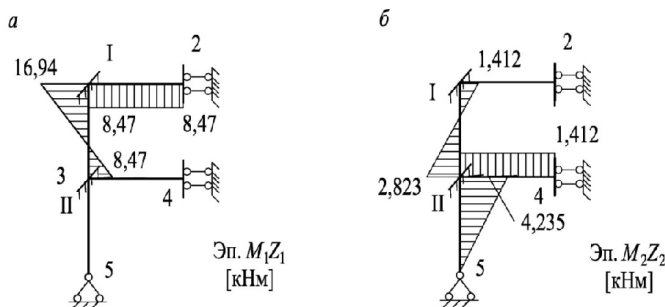


Рис. 8.138

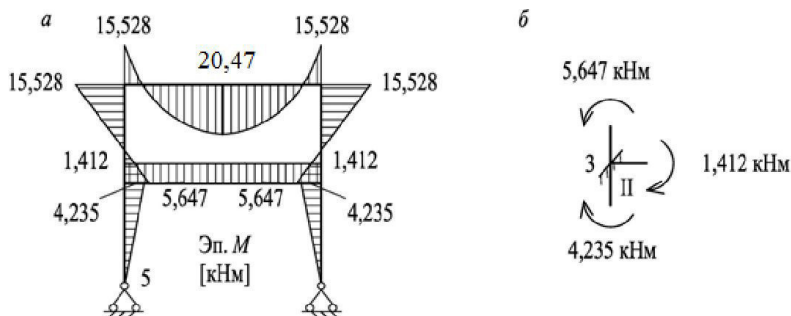


Рис. 8.139

Пример 8.14

Построить эпюру M для однопролетной двухъярусной рамы, нагруженной кососимметричной нагрузкой (рис. 8.140).

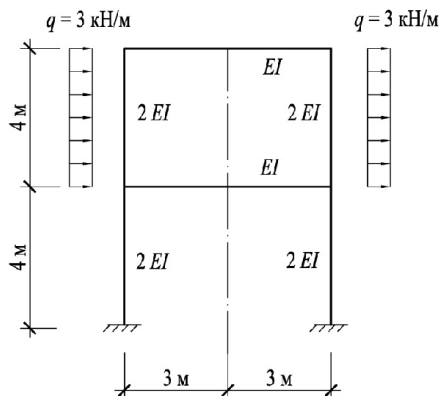


Рис. 8.140

Расчетную схему принимаем в виде половины рамы с шарнирно-подвижными опорами на оси симметрии, введенных на уровне ригелей (рис. 8.141, а), такая схема соответствует характеру деформации рамы при кососимметричной нагрузке – изгибающий момент на оси симметрии равен нулю. Основную систему выбираем с введением только защемлений в жесткие узлы рамы, хотя расчетная схема имеет две линейные подвижности по горизонтали на уровне ригелей из-за наличия введенных шарнирно-подвижных опор. В литературе такая система без введения линейных связей также называется свободной (рис. 8.141, б).

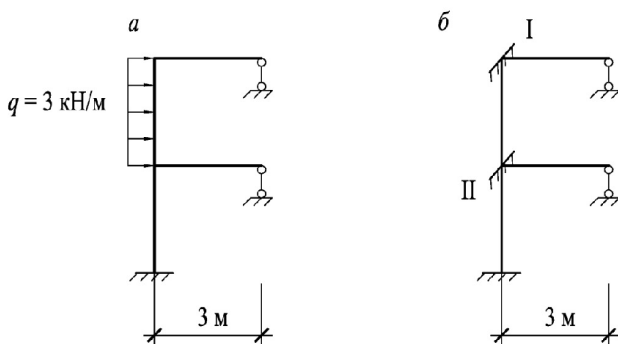


Рис. 8.141

Расчет ведем по ранее использованной методике. На рис. 8.142, а приведена эпюра M_1 , а на рис. 8.142, б – определение коэффициентов r_{11} и r_{21}

Поясним вычисления моментов на эпюре M_1 :

$$m_{12} = \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{3E \cdot I}{3} = E \cdot I;$$

для стойки 1-3 используем формулу для ползуна $m_{13} = \frac{E \cdot I}{l}$, после подстановки жесткости стойки 1-3 получаем

$$m_{13} = \frac{2E \cdot I}{4} = 0,5E \cdot I.$$

Здесь для стойки 1-3 использован «эффект ползуна», т. к. ригель 1-2 благодаря линейной подвижности по горизонтали играет для стержня 1-3 роль ползуна (использовали формулу строки 5 табл. 8.1).

$$r_{11} = m_{12} + m_{13} = E \cdot I + 0,5E \cdot I = 1,5E \cdot I; \quad r_{21} = m_{13} = 0,5E \cdot I.$$

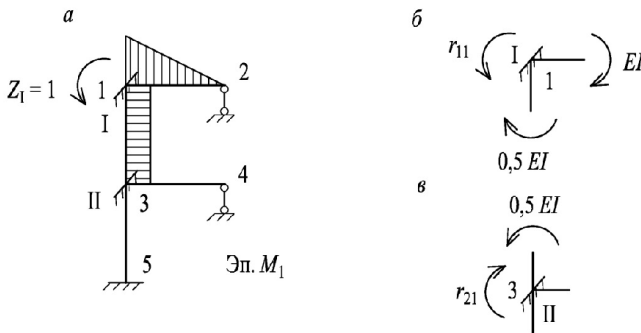


Рис. 8.142

Эпюра M_2 и определение коэффициентов r_{22} и r_{12} — на рис. 8.143,а.

Поясним ординаты на эпюре M_2 :

$$m_{31} = EI/l - \text{формула для балки с ползуном: } m_{31} = \frac{2E \cdot I}{4} = 0,5E \cdot I;$$

$$m_{35} = 0,5E \cdot I; \quad m_{34} = \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{3E \cdot I}{3} = E \cdot I;$$

Определение коэффициентов приведено на рис. 8.143, б, в:

$$r_{22} = m_{31} + m_{34} + m_{35} = (0,5 + 1,0 + 0,5)E \cdot I = 2E \cdot I;$$

$$r_{12} = m_{13} = 0,5E \cdot I.$$

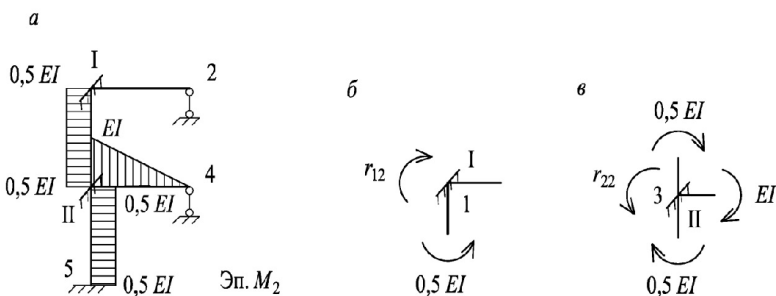


Рис. 8.143

Грузовая эпюра тоже имеет свои особенности в связи с использованием «свободной» основной системы. Понятно, что для нагруженной стойки 1-3 использована формула стержня с ползуном – $M_{31} = \frac{ql^2}{3} = \frac{3 \cdot 4^2}{3} = 16 \text{ кНм}$,

$$M_{13} = \frac{ql^2}{6} = \frac{3 \cdot 4^2}{6} = 8 \text{ кНм}, \text{ (рис. 8.144).}$$

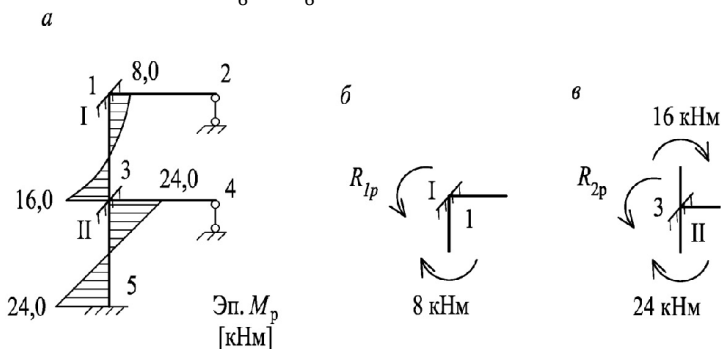


Рис. 8.144

Но в отличие от «несвободной» основной системы, в этом примере есть эпюра и на ненагруженном стержне 3-5:

$M_{35} = M_{53} = 24 \text{ кНм}$ – этот момент определен из условия, что поперечная сила $Q_{53} = Q_{35} = 12 \text{ кН}$.

Эпюра M_p и определение коэффициентов R_{1p} и R_{2p} показано на рис. 8.144, а, б. Из равновесия узла 1 имеем $R_{1p} = M_{13} = 8 \text{ кНм}$, из равновесия узла 3 имеем $R_{2p} = M_{13} + M_{35} = 40 \text{ кНм}$.

Система уравнений с учетом знака $r_{12} = r_{21} = -0,5EI$ (направление r_{12} противоположно r_{11}) приобретает вид:

$$1,5Z_1 - 0,5Z_2 + \frac{8}{EI} = 0,$$

$$-0,5Z_1 + 2Z_2 + \frac{40}{EI} = 0,$$

после решения которой получаем $Z_1 = -\frac{13,09}{E \cdot I}$ и $Z_2 = -\frac{23,27}{E \cdot I}$.

Эпюры $M_1 \cdot Z_1$ и $M_2 \cdot Z_2$ приведены на рис. 8.145, эпюра M для рамы в целом показана на рис. 8.146.

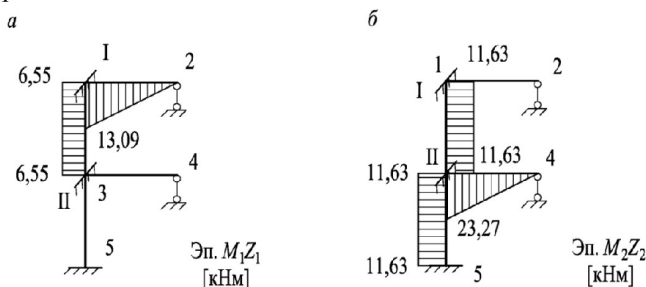


Рис. 8.145

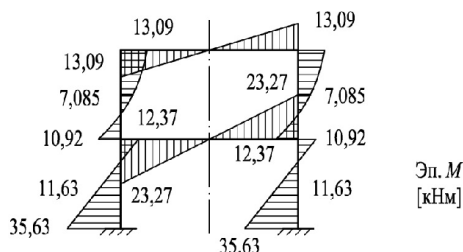


Рис. 8.146

Для деформационной проверки выбрана основная система метода сил — она показана на рис. 8. 147, а, а на рис. 8.147, б приведен вариант единичной эпюры, по которой выполнена деформационная проверка для рамы в целом:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M \bar{M}_1}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} (0 \cdot 13,09 - 4 \cdot 0 \cdot 3 - 6 \cdot 13,09) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4}{6} (-13,09 \cdot 6 - 4 \cdot 7,085 \cdot 6 + 6 \cdot 10,92) + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 11,63 = \\ &= \frac{139,56 - 139,56}{EI} = 0. \end{aligned}$$

В этом случае при перемножении эпюр на нижней стойке использована формула Верещагина; ордината под центром тяжести участка эпюры \bar{M}_1 на эпюре M получена как средняя линия «перекрученной» трапеции:

$$\frac{35,63 - 12,37}{2} = 11,63.$$

Для ригеля и для верхней стойки использована формула Симпсона.

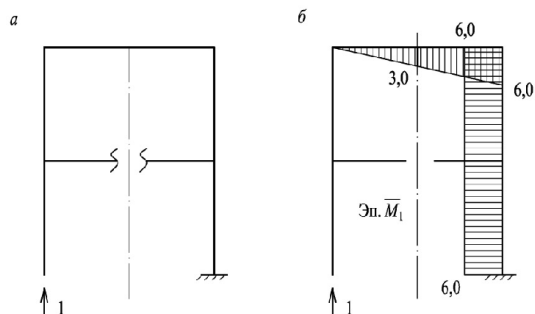


Рис. 8.147

В связи с этим примером можно отметить, что «эффект ползуна» можно применять и для несимметричных систем с целью уменьшения количества неизвестных. На рис. 8.148, *а* показана несимметричная рама, у которой $K = 3$, если решать обычным образом, но с введением только защемлений при получении ОСМП и использовании формулы для ползуна количество неизвестных сведется к двум.

На рис. 8.148, *б* показана упрощенная основная система.

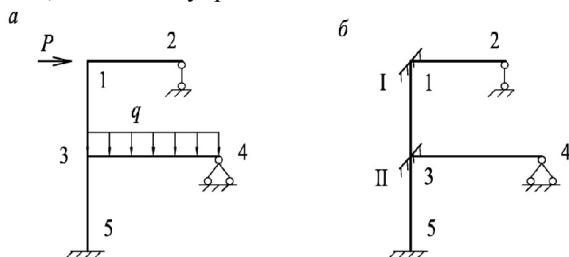


Рис. 8.148

9. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

9.1. Понятие устойчивости

Под устойчивостью понимается способность конструкции и ее элементов сохранять первоначальную форму упругого равновесия при действии нагрузки или восстанавливать ее после снятия нагрузки. Так при сжатии длинного прямого стержня осевой нагрузкой, приложенной на конце стержня, последний вначале остается прямым, т. е. имеет прямолинейную форму равновесия, которая является устойчивой. При достижении нагрузкой некоторой критической величины $P = P_k$ стержень искривляется, выпучивается в сторону или, как принято говорить, теряет устойчивость.

Другой пример: известная Останкинская телевизионная башня, ее ось направлена строго по радиусу земли. Однако при действии ветровых нагрузок, имеющих сложный характер, верхний конец отклоняется от исходного положения примерно на три с половиной метра, т. е. ось искривляется. После снятия внешних воздействий форма равновесия восстанавливается, таким образом, данная конструкция устойчива.

При критической нагрузке наблюдается переход из одной формы равновесия в другую, например в стержнях: прямолинейная форма равновесия меняется на криволинейную, круговая форма равновесия в кольцах меняется на эллиптическую и т. д. В этих случаях дальнейшая нормальная эксплуатация конструкций становится невозможной. Поэтому с расчетной точки зрения критическая сила рассматривается как опасная.

9.2. Расчеты устойчивости на основе метода перемещений.

Общие положения

Наиболее эффективным методом расчета стержневых систем на устойчивость является метод перемещений. В отличие от метода сил, он требует меньшего числа неизвестных, обладает простотой определения коэффициентов канонических уравнений, однотипностью основной системы.

За неизвестные при потере устойчивости системы так же, как и при статическом расчете, принимаются углы поворота упругих узлов и их линейное смещение. Для определения неизвестных, как и обычно, выбирается основная система. Она получается в результате наложения на все внеопорные упругие узлы защемлений, препятствующих их повороту, и закрепление узлов стерженьками, устраняющими их линейное смещение.

При этом, как и ранее, считаем, что продольные силы в стойках, балках, рамах в момент потери устойчивости остаются неизменными и

пропорциональными одному параметру P . В рамах, кроме того, будем пренебрегать продольными и сдвигающими деформациями, обусловленными действием продольных и поперечных сил, а также сближением концов стержней. В момент потери устойчивости, в силу узловой передачи нагрузки, реактивные усилия от внешней нагрузки (свободные члены) в канонических уравнениях метода перемещений будут равны нулю.

Для определения критической силы в простых стержнях используют формулу А. Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (9.1)$$

где l – длина; EI_{\min} – минимальная жесткость стержня при изгибе; μ – коэффициент расчетной длины, зависящий от характера опирания стержня.

Потеря устойчивости происходит не только в стержнях, но и в балках, рамах, оболочках и т. д.

Различают потерю устойчивости первого и второго рода. Потеря устойчивости первого рода при постепенном статическом возрастании нагрузки происходит внезапно и сопровождается появлением и развитием совершенно новых форм деформации. Примером этого явления может служить потеря устойчивости прямого сжатого стержня, рамы, элементы которой нагружены узловой нагрузкой, и др.

Потеря устойчивости второго рода происходит в результате развития предшествующих деформаций, без появления новых форм деформации, вследствие невозможности поддержания статического равновесия между внешними нагрузками и внутренними силами системы. Это связано с очень большими упругими деформациями либо с работой сооружения частично или полностью за пределами упругости. Ниже рассматривается потеря устойчивости в упругих системах первого рода.

При расчете рам (рис. 9.1) действующие внешние усилия пропорциональны одному параметру P (k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности). На рис. 9.1, *а* представлена местная форма потери устойчивости, а на рис. 9.1, *б* – общая.

В этом случае под критическим $P = P_{\text{кр}}$ следует понимать тот наименьший параметр критической системы сил, при котором наблюдается переход исходной системы из прямолинейной в смежную искривленную форму равновесия (статический критерий). При этом, в отличие от изолированных стоек, в рамах наблюдается как местная, так и общая формы потери устойчивости. Местную форму выпучивания связывают лишь с поворотом

жестких узлов (рис. 9.1, а), а общую – как с поворотом, так и с линейным смещением узлов (рис. 9.1, б).

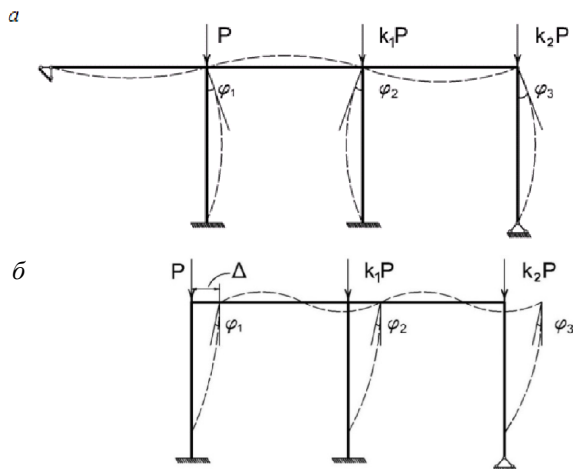


Рис. 9.1

Местная форма выпучивания, как правило, наблюдается в рамах с линейно-неподвижными узлами, а общая – в рамах с линейно-подвижными узлами. В реальных конструкциях любое сжимающее усилие N в стойках должно быть меньше критического параметра для рамной системы

$$P_{кр} = v^2 \frac{EI_{min}}{l^2}, \quad (9.2)$$

т. е. должен быть обеспечен запас устойчивости сооружения:

$$k_y = \frac{P_{кр}}{N} > 1.$$

В сжатом элементе рамы величину

$$v = l \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (9.3)$$

принято называть коэффициентом влияния продольной силы. Между коэффициентами v и μ в сжатом стержне прослеживается связь

$$v = \frac{\pi}{\mu}.$$

Коэффициент μ необходим для определения гибкости сжатого стержня

$$\lambda = \lambda_{min} = \mu l / i_{min},$$

где $i_{min} = \sqrt{I_{min}/A}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения; I_{min} – минимальный центральный момент инерции; A – площадь поперечного сечения.

По гибкости $\lambda = \lambda_{\min}$ можно определить коэффициент продольного изгиба φ , используемый для проверки прочности сжатого элемента рамы:

$$\frac{N}{\varphi A} \leq R_y \gamma_c, \quad (9.4)$$

где R_y – расчетное сопротивление материала сжатию, γ_c – коэффициент условий работы.

Проверка прочности сжато-изогнутого элемента рамы осуществляется по аналогичной формуле

$$\frac{N}{\varphi_e A} \leq R_y \gamma_c. \quad (9.5)$$

Здесь φ_e – коэффициент снижения расчетного сопротивления, зависящий от условной гибкости стержня $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{R_y / E}$ и относительного эксцентриситета

$$m_{ef} = m \eta = \left(\frac{M}{N W} \right) \eta, \quad (9.6)$$

где η – коэффициент влияния формы сечения (см. таблицу Д.2 СП 16.13330.2011).

Если действующие на сооружение нагрузки различны по своему характеру (собственный вес, снеговая нагрузка и др.), т. е. нагружение является многопараметрическим, то приходится выявлять серию критических значений $P_{кр}$, соответствующих различным сочетаниям нагрузок.

Необходимо отметить, что сжатые стержневые системы при потере устойчивости ведут себя иначе, чем тонкостенные упругие системы. На рис. 9.2 показано поведение сжатых идеальных (сплошные линии) и реальных (штриховые) систем. Для сжатого стержня критическая сила $P_{кр}$ является предельной силой, достичь ее в реальных условиях из-за несовершенств конструктивной формы практически невозможно (рис. 9.2, а). Пластика способна сопротивляться сжимающей нагрузке в закритической области (рис. 9.2, б), при этом в ней возникают значительные перемещения ($v/h > 1$, h – толщина). В идеальной упругой оболочке верхняя критическая нагрузка $P_{кр}$ является особенно опасной, ибо по ее достижению в системе мгновенно нарастают прогибы (система прохлопывает). Из-за наличия несовершенств формы хлопок в реальной оболочке происходит при нагрузке $P_{хл} < P_{кр}$ (рис. 9.2, в). В новом равновесном состоянии при конечных перемещениях ($v/h \gg 1$) оболочка способна сопротивляться действию внешних сжимающих нагрузок [7]. Однако большие перемещения могут оказаться неприемлемыми для эксплуатации сооружения.

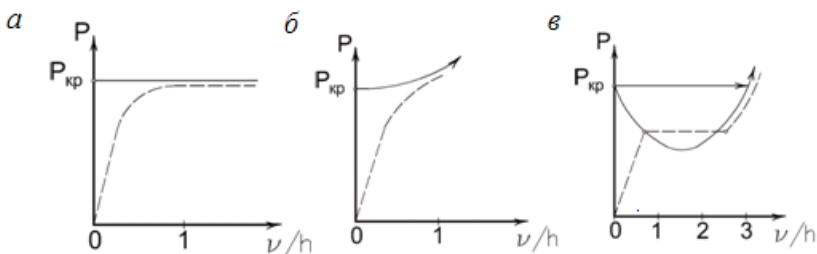


Рис. 9.2

Иногда для определения $P_{кр}$ (или $q_{кр}$) статический метод Эйлера, основанный на бифуркации форм равновесия, оказывается неприемлемым (следящие нагрузки). В этом случае необходимо применять динамический или энергетические методы [12], изложение которых выходит за рамки нашего учебного пособия.

Канонические уравнения метода перемещений в расчетах на устойчивость принимают вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1n}Z_n = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2n}Z_n = 0, \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \dots + r_{nn}Z_n = 0, \end{cases} \quad (9.7)$$

где $r_{ik} = r_{ik}(\nu)$ – реакции, возникающие в связях от единичных смещений с учетом влияния продольных сил.

Эти уравнения, отрицающие наличие наложенных связей, и выражают мысль, что усилия во всех наложенных замещениях и введенных стерженьках, т.е. в дополнительных связях основной системы, должны равняться нулю в момент потери устойчивости стержневой системы.

Система канонических уравнений (9.7) может удовлетворяться в случае равенства нулю неизвестных параметров Z_1, Z_2, \dots, Z_n , но при потере устойчивости они не равны нулю. Поэтому для отыскания решения, отличного от нулевого, составляют определитель $D(\nu)$ из коэффициентов при неизвестных и приравнивают его к нулю.

Система (9.7) представляет собой систему линейных однородных уравнений, а ее детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю и имеет вид:

$$\begin{vmatrix} r_{11}(\nu) & r_{12}(\nu) & \dots & r_{1n}(\nu) \\ r_{21}(\nu) & r_{22}(\nu) & \dots & r_{2n}(\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}(\nu) & r_{n2}(\nu) & \dots & r_{nn}(\nu) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.8)$$

Раскрывая детерминант, получим уравнение устойчивости в форме метода перемещений. Решения этого уравнения позволяют найти спектр собственных значений $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_n$, но для расчета используют наименьший корень, представляющий критическое значение безразмерного параметра $v_{\min} = v_{\text{кр}}$. С учетом $v_{\text{кр}}$ можно установить критическую силу

$$P_{\text{кр}} = v_{\text{кр}}^2 \frac{EI}{l^2}. \quad (9.9)$$

Необходимо обратить внимание, что коэффициенты при неизвестных в уравнениях (9.7) определяются так же, как в методе перемещений, рассматривая равновесие узлов и отсеченной части рамы или узлов балки при повороте защемлений и линейного смещения наложенных связей.

Вследствие возникновения продольных сил в сжатых стержнях при потере устойчивости определение реакций $r_{ik}(v)$ существенно усложняется, т. к. на них оказывает влияние не только смещение узлов, но и продольные силы.

Влияние продольной силы учитывается безразмерным параметром v (9.3). Так как реакции $r_{ik}(v)$ зависят от реактивных моментов $m_{ik}(v)$ и поперечных сил $q_{ik}(v)$ в сжато-изогнутых статически неопределимых стержнях от единичных смещений, то для облегчения их определения они рассмотрены заранее [7] и приведены в таблице 9.1 [7].

Специальные функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$, $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$ ¹, определяемые сложными тригонометрическими выражениями и входящие в $r_{ik}(v)$, приведены в таблицах 9.2, и [7]. Значения этих функций рассчитаны в диапазоне изменения параметра v от 0 до 2π .

9.3. Расчеты устойчивости балок и стоек

Пример 9.1

Определить критическую силу для многопролетного стержня (рис. 9.3), если жесткости пролетов и их длины известны.

Определим приближенное значение критического параметра, для этого введем в сечения стержня над внешними промежуточными опорами шарниры (рис. 9.4) и определим для каждого из полученных независимых друг от друга однопролетных стержней критические силы.

¹ Эти функции были табулированы проф. Коркоуховым [7], проф. А.Ф. Смирновым [12].

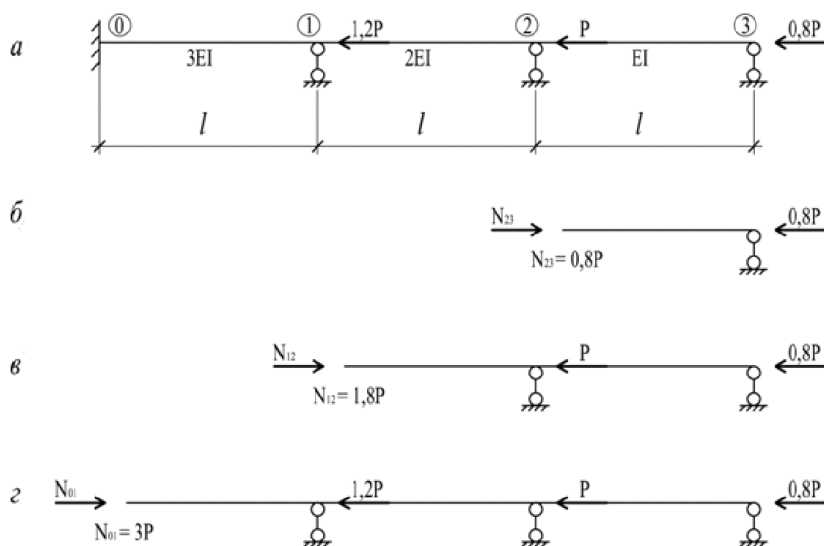


Рис. 9.3



Рис. 9.4

Участок 0-1

На этом участке стержень с левого конца жестко заделан, а правый конец имеет шарнирное опирание. По формуле Эйлера находим критическую силу:

$$N_{01}^{\text{кр}} = \nu_{01}^2 \frac{EI_{01}}{l_{01}^2},$$

где $\nu_{01} = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{0,7} = 4,486$.

Учитывая продольную силу, действующую на этом участке, $N_{01} = 3P$ (рис. 9.3, г), имеем:

$$3P_{\text{кр}} = \nu_{01}^2 \frac{EI_{01}}{l_{01}^2}; \quad \text{отсюда} \quad P_{\text{кр}} = \nu_{01}^2 \frac{EI_{01}}{3l_{01}^2} = 4,486^2 \frac{3EI}{3l^2} = 20,14 \frac{EI}{l^2}.$$

Участок 1-2

$$N_{12}^{\text{кр}} = \nu_{12}^2 \frac{EI_{12}}{l_{12}^2} = \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^2 \frac{2EI}{l^2} = \left(\frac{3,14}{1} \right)^2 \frac{2EI}{l^2} = 9,87 \frac{2EI}{l^2} = 19,74 \frac{EI}{l^2}.$$

$$N_{12}^{\text{кр}} = 19,74 \frac{EI}{l^2}.$$

Из равновесия участка (рис. 9.3, в) находим продольную силу.

$$N_{12} = 1,8P.$$

С учетом этого находим критическую силу для пролета 1-2.

$$P_{\text{кр}}^{12} = 19,74 \frac{EI}{1,8l^2} = 10,97 \frac{EI}{l^2}.$$

Участок 2-3

$$N_{23}^{\text{кр}} = v_{23}^2 \frac{EI_{23}}{l_{23}^2} = 9,87 \frac{EI}{l^2}; \quad P_{\text{кр}}^{23} = \frac{9,87 EI}{0,8l^2} = 12,337 \frac{EI}{l^2}.$$

Сопоставляя значения, видим наиболее опасный участок 1-2, т. к. здесь критическая сила имеет минимальное значение.

$$P_{\text{кр}} = 10,97 \frac{EI}{l^2}.$$

Истинное значение будет несколько больше этого наименьшего приближенного значения.

Точное решение рассматриваемой задачи

Критическую силу находим, используя метод перемещений:

1. Определяем степень кинематической неопределимости $K = K_1 = 2$.
2. Выбираем основную систему метода перемещений. Вводим защемления I, II в узлы 1 и 2 (рис. 9.5).

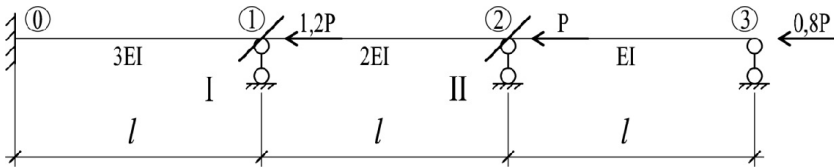


Рис. 9.5

3. Записываем уравнение устойчивости. В рассматриваемом случае оно представляет собой определитель второго порядка $D(v)$:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21} = 0. \quad (9.10)$$

4. Определяем коэффициенты уравнения устойчивости в общем виде.

- а) Поворачиваем защемление I в узле 1 против часовой стрелки на угол $\varphi_1 = 1$

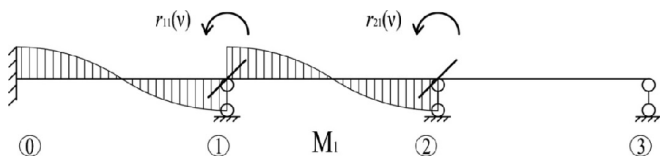


Рис. 9.6

Из таблицы 9.1 схемы 3 имеем:

$$m_{10} = 4 \frac{EI_{01}}{l_{01}} \phi_2(v_{01}) = 4 \frac{3EI}{l} \phi_2(v_{01}); \quad m_{12} = 4 \frac{EI_{12}}{l_{12}} \phi_2(v_{12}) = 4 \frac{2EI}{l} \phi_2(v_{12});$$

$$\phi_2(v_{01}) = \frac{1 - \frac{v_{01}}{2}}{\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{v_{01}}{2}}{\frac{v_{01}}{2}} - 1 \right)}.$$

С учетом m_{10} и m_{12} (рис. 9.6) из равновесия узла 1 (рис. 9.7) находим реактивное усилие r_{11} .

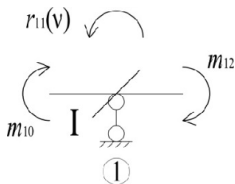


Рис. 9.7

$$r_{11} = m_{10} + m_{12} = 4 \frac{3EI}{l} \phi_2(v_{01}) + 4 \frac{2EI}{l} \phi_2(v_{12}) = 4 \frac{EI}{l} (3 \cdot \phi_2(v_{01}) + 2 \cdot \phi_2(v_{12})).$$

Аналогично из равновесия узла 2 находим:

$$r_{21} = r_{12} = m_{21} = 2 \frac{2EI}{l} \phi_3(v_{12}) = 4 \frac{EI}{l} \phi_3(v_{12}).$$

б) От поворота защемления II на $\phi_2 = 1$ (рис. 9.8):

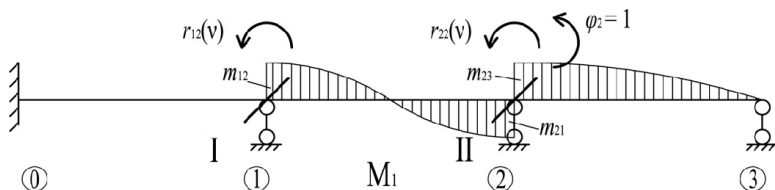


Рис. 9.8

$$r_{12} = m_{12} 4 \frac{EI}{l} \varphi_3(v_{12}).$$

Значения моментов m_{12} и m_{23} берем из таблицы 9.1, схемы 3 и 1.

$$r_{22} = m_{21} + m_{23} = 4 \frac{2EI}{l} \varphi_2(v_{12}) + 3 \frac{EI}{l} \varphi_1(v_{23}) = \frac{EI}{l} (8 \cdot \varphi_2(v_{12}) + 3 \cdot \varphi_1(v_{23})).$$

С учетом $P_{кр} = 10,97 \frac{EI}{l^2}$ (приближенное значение) найдем коэффициент влияния продольных усилий:

$$\text{а) } v_{01} = l_{01} \sqrt{\frac{N_{01}}{EI_{10}}} = l \sqrt{\frac{3 \cdot 10,97 EI}{3EI \cdot l^2}} = \sqrt{10,97} = 3,312 \quad (v_{01} = v = 3,312);$$

$$\text{б) } v_{12} = l_{12} \sqrt{\frac{N_{12}}{EI_{12}}} = l \sqrt{\frac{1,8 \cdot 10,97 EI}{2EI \cdot l^2}} = \sqrt{0,9 \cdot 10,97} = 0,9487 \cdot v;$$

$$\text{в) } v_{23} = l_{23} \sqrt{\frac{N_{23}}{EI_{23}}} = l \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10,97 EI}{EI \cdot l^2}} = 0,894 \cdot v.$$

Запишем выражения для функций, входящих в коэффициенты r_{ik} определителя при

$$v_{01} = 3,312; \quad v_{12} = 0,9487 \cdot v = 0,9487 \cdot 3,312 = 3,142; \quad v_{23} = 0,894 \cdot 3,312 = 2,962.$$

Функции φ_i определяем по таблице специальных функций (см. табл. 9.2):

$$\varphi_2(v_{01}) = \varphi_2(3,312) = 0,566; \quad \varphi_2(v_{12}) = \varphi_2(3,142) = 0,6168;$$

$$\varphi_3(v_{12}) = \varphi_3(3,142) = 1,2336; \quad \varphi_1(v_{23}) = \varphi_1(2,962) = 0,1706.$$

С учетом этого:

$$r_{11}(v) = 4 \frac{EI}{l} (3 \cdot \varphi_2(v_{01}) + 2 \cdot \varphi_2(v_{12})) = 4 \frac{EI}{l} (3 \cdot 0,566 + 2 \cdot 0,6168) = 11,726 \frac{EI}{l};$$

$$r_{12}(v) = r_{21} = 4 \frac{EI}{l} \varphi_3(v_{12}) = 4 \frac{EI}{l} \cdot 1,2336 = 4,934 \frac{EI}{l};$$

$$r_{22}(v) = (8 \cdot \varphi_2(v_{12}) + 3 \cdot \varphi_1(v_{23})) \frac{EI}{l} = (8 \cdot 0,6168 + 3 \cdot 0,1706) \frac{EI}{l} = 5,444 \frac{EI}{l}.$$

Вычисляем определитель $D_1(v)$ для значения $v = 3,312$:

$$D_1(v) = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = \frac{EI}{l} (11,726 \cdot 5,444 - (4,934)^2) = (63,8 - 24,34) \cdot \left(\frac{EI}{l}\right)^2 \neq 0.$$

Определитель не равен нулю. При этом $D_1(v) = 39,45 \left(\frac{EI}{l}\right)^2 > 0$, что

означает, что $P_{кр}$ надо увеличить.

5. Делаем первое приближение. Принимаем $P_{кр} = 12 \frac{EI}{l^2}$.

Далее аналогично изложенному выше (пункты: а, б, в)

$$\nu_{01} = \sqrt{12} = 3,464; \quad \nu_{12} = 0,9487\nu = 0,9487 \cdot 3,464 = 3,286;$$

$$\nu_{23} = 0,894\nu = 0,894 \cdot 3,464 = 3,097.$$

Выписываем функции $\varphi_i(\nu)$ для этих значений ν из табл. 9.2.

$$\varphi_2(\nu_{01}) = \varphi_2(3,464) = 0,5162; \quad \varphi_2(\nu_{12}) = \varphi_2(3,286) = 0,5753;$$

$$\varphi_3(\nu_{12}) = \varphi_3(3,286) = 1,2644; \quad \varphi_1(\nu_{23}) = \varphi_1(0,97) = 0,0523.$$

После этого находим коэффициенты:

$$r_{11}(\nu) = 4 \frac{EI}{l} (3 \cdot 0,5162 + 2 \cdot 0,5753) = 10,797 \frac{EI}{l},$$

$$r_{12}(\nu) = r_{21}(\nu) = 4 \frac{EI}{l} 1,2644 = 5,0576 \frac{EI}{l},$$

$$r_{22}(\nu) = (8 \cdot 0,5753 + 3 \cdot 0,0523) = 4,758 \frac{EI}{l}.$$

С учетом найденных значений производим вычисление определителя (9.12):

$$D_2(\nu) = (10,797 \cdot 4,758 - 5,0576^2) \cdot \left(\frac{EI}{l}\right)^2 = 25,7 \cdot \left(\frac{EI}{l}\right)^2 > 0.$$

Определитель больше нуля, увеличиваем силу и повторяем решение.

6. Производим вторую попытку расчета, как изложено выше.

Пусть $P_{кр} = 14 \frac{EI}{l^2}$:

$$\nu_{01} = \sqrt{14} = 3,74.$$

$$\varphi_2(\nu_{01}) = 0,4102$$

$$\varphi_2(\nu_{12}) = 0,4878$$

$$\nu_{12} = 0,9487 \cdot 3,74 = 3,549.$$

$$\varphi_3(\nu_{12}) = 1,3328$$

$$\varphi_1(\nu_{23}) = -0,2383$$

$$\nu_{23} = 0,894 \cdot 3,74 = 3,344.$$

$$r_{11}(\nu) = 4 \frac{EI}{l} (3 \cdot 0,4102 + 2 \cdot 0,4878) = 8,821 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{12}(\nu) = r_{21}(\nu) = 4 \frac{EI}{l} 1,3328 = 5,33 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{22}(\nu) = \frac{EI}{l} (8 \cdot 0,4878 + 3 \cdot 0,2383) = 3,18 \frac{EI}{l}.$$

$$D_3(\nu) = (8,821 \cdot 3,18 - 5,33^2) \cdot \left(\frac{EI}{l}\right)^2 = -0,35812 \cdot \left(\frac{EI}{l}\right)^2.$$

Определитель меньше нуля:

$$D_3(\nu) = -0,358 \cdot \left(\frac{EI}{l} \right)^2 < 0.$$

Значит, $P_{кр}$ имеет несколько меньшее значение. Точное значение можно найти, используя интерполяцию результата по двум последним попыткам. Для этого используем график (рис. 9.9). Интервал $\Delta\nu = 3,74 - 3,464 = 0,276$.

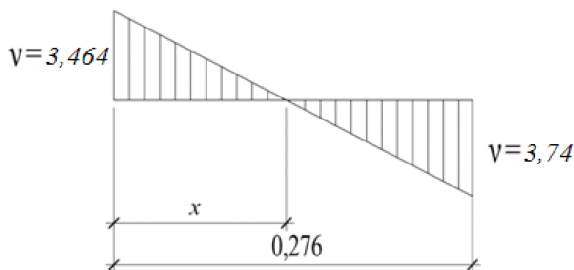


Рис. 9.9

В соответствии с графиком (рис. 9.9) имеем

$$\frac{3,464}{x} = \frac{3,74}{0,276 - x},$$

откуда

$$x = \frac{3,464 \cdot 0,276}{3,74 + 3,464} = 0,133.$$

Тогда коэффициент $\nu_{кр}$, соответствующий наименьшему параметру критической силы, равен:

$$\nu_{кр} = 3,464 + 0,133 = 3,597.$$

С учетом $\nu_{кр}$ находим $P_{кр}$:

$$P_{кр} = \nu_{кр}^2 \frac{EI}{l^2} = (3,597)^2 \cdot \frac{EI}{l^2} = 12,938 \frac{EI}{l^2}.$$

Таким образом, для системы $P_{\min} = P_{кр} = 12,938 \frac{EI}{l^2}$.

Пример 9.2

Определить наименьший параметр критической системы сил для стержня, у которого нижний конец жестко заделан (рис. 9.10), а верхний снабжен ползунком. $l_{23} = 0,6l$; $l_{12} = 0,4l$.

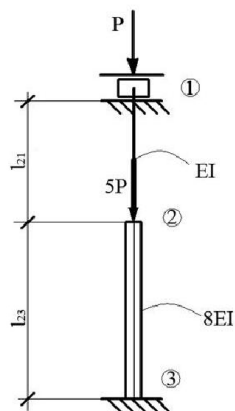


Рис. 9.10

Наименьший параметр критической силы $P_{\min}^{\text{кр}}$ определим, решая уравнения устойчивости.

Если перейти к методу перемещений, то основная система метода перемещений имеет следующий вид (рис. 9.11).

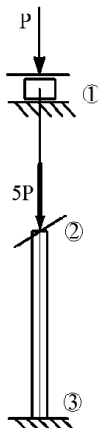


Рис. 9.11

Основная система получена путем введения одного защемления в сечении узла 2. Тогда уравнение устойчивости будет иметь вид: $r_{11} = 0$.

Это уравнение выражает то, что реактивный момент, который необходимо приложить в сечении 2 при потере устойчивости стойки, равен нулю.

Применительно к основной системе метода перемещений найдем значения моментов для участка 1-2 (рис. 9.12) по таблице 9.1, строка 5.

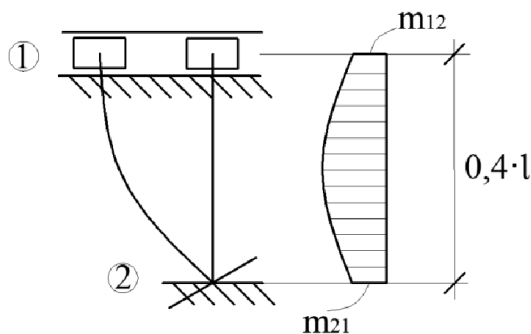


Рис. 9.12

$$m_{12} = \frac{EI}{0,4l} \cdot \frac{v_{12}}{\sin v_{12}}; \quad m_{21} = \frac{EI}{0,4l} \cdot \frac{v_{12}}{\operatorname{tg} v_{12}}.$$

Аналогично для участка 2-3. Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 9.13.

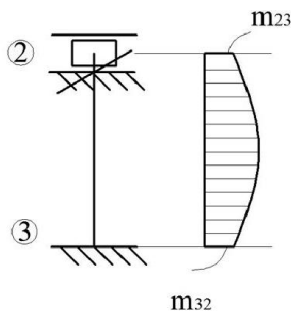


Рис. 9.13

$$m_{23} = \frac{8EI}{0,6l} \cdot \frac{v_{23}}{\operatorname{tg} v_{23}}.$$

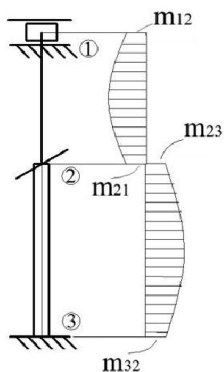
Из рассмотрения узла 2 (рис. 9.14, б) имеем:

$$r_{11} = m_{21} + m_{23} = \frac{EI}{0,4l} \cdot \frac{v_{12}}{\operatorname{tg} v_{12}} + \frac{8EI}{0,6l} \cdot \frac{v_{23}}{\operatorname{tg} v_{23}} = 0.$$

С учетом параметров уравнение устойчивости после преобразований имеет вид:

$$\frac{v_{12}}{\operatorname{tg} v_{12}} + 5,33 \frac{v_{23}}{\operatorname{tg} v_{23}} = 0.$$

а



б

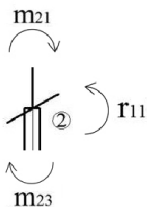


Рис. 9.14

Для решения этого уравнения устанавливаем приближенное значение параметра коэффициента влияния продольных сил – ν . Критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{\mu^2} \cdot \frac{EI}{(0,4l)^2}.$$

Тогда применительно к участку 1-2

$$\nu = l \sqrt{\frac{N}{EI}} = (0,4l) \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{\mu^2 (0,4l)^2 EI}} = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{0,7} = 4,485.$$

$$\nu_{12} = l_{12} \sqrt{\frac{N_{12}}{EI_{12}}} = (0,4l) \sqrt{\frac{P}{EI}} = \nu.$$

$$\nu_{23} = l_{23} \sqrt{\frac{6P}{EI_{23}}} = (0,6l) \sqrt{\frac{6P}{8EI}} = (0,3l) \sqrt{\frac{3P}{EI}} = (0,52l) \sqrt{\frac{P}{EI}} = 1,3\nu.$$

С учетом этого уравнение устойчивости принимает вид:

$$\frac{\nu}{\text{tg } \nu} + 5,33 \frac{1,3\nu}{\text{tg}(1,3\nu)} = 0. \quad (9.11)$$

1. Первая попытка решения уравнения.

$$\nu = 4,485, \text{ тогда } \nu_{23} = 1,3\nu = 4,485 \cdot 1,3 = 5,83.$$

Подставляя в уравнение устойчивости, имеем:

$$D_1(\nu) = \frac{4,485}{\text{tg}(4,485)} + 5,33 \frac{5,83}{\text{tg}(5,83)} = 1,0603 + 5,33 \cdot (-12,129) = -63,587.$$

Значение функции $\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$ берем в таблице 9.2.

$$D_1(\nu) = -63,587 < 0.$$

Это означает, что истинное $P_{\text{кр}}$ должно быть меньше, чем при $\nu = 4,485$.

2. Вторая попытка. Принимаем $\nu = 3,5$.

$$\nu_{23} = 1,3\nu = 1,3 \cdot 3,5 = 4,55.$$

$$D_2(\nu) = \frac{3,5}{\operatorname{tg}(3,5)} + 5,33 \frac{4,55}{\operatorname{tg}(4,55)} = 9,345 + 5,33 \cdot 0,7448 = 13,315 > 0.$$

Здесь значение $\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$ взято из табл. 9.2.

$D_2(\nu) = 13,315 > 0$ – это означает, что $P_{\text{кр}}$ должно быть несколько больше.

Находим коэффициент ν , интерполируя результат по двум попыткам (рис. 9.15):

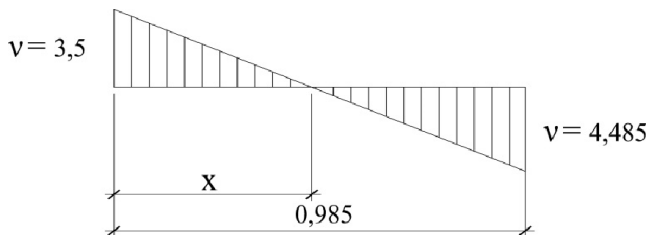


Рис. 9.15

Из соотношения $\frac{3,5}{x} = \frac{4,485}{0,985 - x}$ следует, что $x = \frac{3,5 \cdot 0,985}{4,485 + 3,5} = 0,4317$.

Тогда: $\nu_{\text{ед}} = 3,5 + 0,4317 = 3,9317$.

С учетом $\nu_{\text{кр}}$ наименьший параметр критической силы для стержня (рис. 9.10):

$$P_{\text{кр}} = (3,9317)^2 \frac{EI}{l^2} = 15,46 \frac{EI}{l^2}.$$

Пример 9.3

Определить минимальное значение критической силы $P_{\text{кр}}$ стержня постоянной жесткости (рис. 9.16).

Длина участка 1 – 2 равна $n \cdot l$, а длина участка 2 – 3 равна l , $n = 0,4$.

$\mu_{ik} = \frac{\pi}{\nu_{ik}}$ – коэффициент приведения длины $l_o = \mu_{ik} \cdot l_{ik}$.

Решение производим методом перемещений.

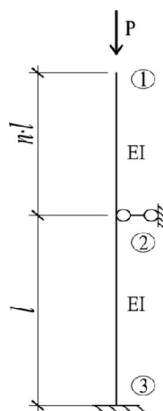


Рис. 9.16

Наложим на сечение узла 2 защемление I (рис. 9.17, а). От поворота защемления I на угол, равный единице, против часовой стрелки в стержнях 1-2 и 2-3 возникают изгибающие моменты m_{ik} , которые берем из табл.9.1.

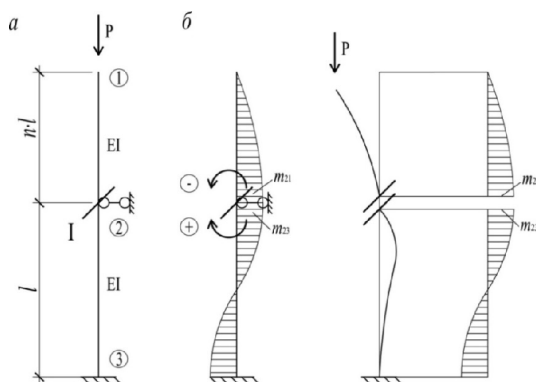


Рис. 9.17

Уравнение устойчивости имеет вид:

$$r_{11} = 0,$$

$$r_{11} = m_{23} - m_{21} = 0.$$

Табличные значения моментов с учетом действия продольных сил определяются по формулам:

$$m_{23} = 4i_{23}\varphi_2(v_{23}) = 4\frac{EI}{l}\varphi_2(v_{23}).$$

$$m_{21} = -i_{21}v_{21}\operatorname{tg}(v_{21}) = \frac{EI}{0,4l}v_{21}\operatorname{tg}(v_{21}).$$

Коэффициенты влияния продольных сил выразим через один параметр:

$$\nu = \nu_{23} = l \sqrt{\frac{P}{EI}};$$

тогда для стержня 1-2 при $a = 0,4l$: $\nu_{21} = 0,4l \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0,4\nu$.

С учетом моментов и параметра ν уравнение устойчивости примет вид:

$$r_{11} = 4 \frac{EI}{l} \varphi_2(\nu) - \frac{EI}{0,4l} 0,4\nu \operatorname{tg}(0,4\nu) = 0 \quad \text{или}$$

$$\varphi_2(\nu) - 0,625[0,4\nu \cdot \operatorname{tg}(0,4\nu)] = 0. \quad (9.12)$$

Для решения этого уравнения мы должны задаться значением ν .

1. Для первого приближения найдем ν , используя формулу Эйлера для участка 1-2.

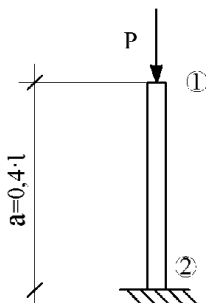


Рис. 9.18

$$P_{\text{кр}}^{\text{приб}} = \frac{\pi^2}{\mu^2} \frac{EI}{(0,4l)^2} = \frac{3,14^2}{2^2} \frac{EI}{(0,4l)^2} = 15,4 \frac{EI}{l^2}.$$

Тогда с учетом того, что коэффициент влияния продольных сил

$$\nu = l \sqrt{\frac{N}{EI}}, \quad \text{то} \quad \nu = 0,4l \sqrt{\frac{15,4EI}{EI \cdot l^2}} = 0,4 \sqrt{15,4} = 0,4 \cdot 3,925 = 1,57.$$

Принимая $\nu = 1,57$, находим, используя табл. 9.1 и табл. 9.2, параметры, входящие в уравнения устойчивости (9.11):

$$\varphi_2(1,57) = 0,9151 \quad (\text{по табл. 9.2}).$$

$$0,4\nu = 0,4 \cdot 1,57 = 0,628.$$

$$0,628 \cdot \operatorname{tg}(0,628) = 0,45 \quad (\text{по табл. 9.2}).$$

Численно раскрывая определитель $D_1(\nu)$, находим:

$$D_1(\nu) = 0,9151 - 0,625 \cdot 0,45 = 0,63 > 0.$$

Определитель больше нуля, значит, следует увеличить ν .

2. Вторая попытка. Принимаем $\nu = 2$.

$$\varphi_2(2) = 0,859 \quad (\text{по табл. 9.2}).$$

$$0,4\nu = 0,4 \cdot 2 = 0,8.$$

$$0,8 \cdot \operatorname{tg}(0,8) = 0,8237 \quad (\text{по табл. 9.2}).$$

Подставим в уравнение (9.14):

$$D_2(\nu) = 0,859 - 0,625 \cdot 0,8237 = 0,344 > 0.$$

Расхождение по-прежнему велико.

3. Третья попытка. Принимаем $\nu = 3$.

$$\varphi_3(3) = 0,656 \quad (\text{по табл. 9.2}).$$

$$0,4\nu = 0,4 \cdot 3 = 1,2.$$

$$1,2 \cdot \operatorname{tg}(1,2) = 3,086 \quad (\text{по табл. 9.2}).$$

Подставим в уравнение (9.10):

$$D_3(\nu) = 0,656 - 0,625 \cdot 3,086 = -1,272 < 0.$$

Значит, истинное $P_{\text{кр}}$ меньше. Уточним критический параметр $\nu_{\text{кр}}$ путем линейной интерполяции на участке.

$$\nu_3 - \nu_2 = 3 - 2 = 1.$$

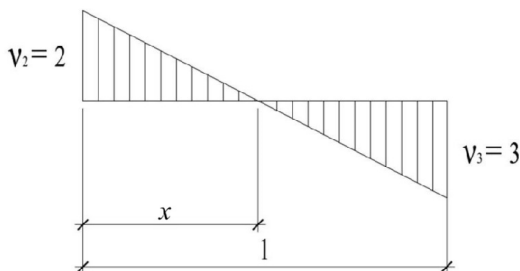


Рис. 9.19

Из рис. 9.19 из подобия имеем:

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{1-x}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{2}{5} = 0,4.$$

С учетом этого

$$\nu_{\text{кр}} = 2 + 0,4 = 2,4,$$

а наименьший параметр критической системы сил

$$P_{\text{кр}} = \nu_{\text{кр}}^2 \frac{EI}{l^2} = 2,4^2 \frac{EI}{l^2} = 5,76 \frac{EI}{l^2}.$$

9.4. Расчет рам на устойчивость

9.4.1. Основные понятия

В предыдущей главе было рассмотрено применение метода перемещений (МП) для расчета рам на прочность. Этот метод оказался эффективным и для расчета рам на устойчивость. Для использования МП в расчетах на устойчивость были выведены формулы реакций от единичных воздействий для типовых стержней, работающих на сжатие (табл. 9.1). Формулы реакций сжатых стержней аналогичны формулам табл. 8.1, но от выражений этой таблицы указанные реакции в типовых стержнях отличаются наличием специальных функций $\varphi_1(v); \dots \varphi_2(v); \dots \eta_1(v); \dots \eta_2(v)$ (функции Н. В. Корноухова).

Эти функции зависят от параметра v , который называется коэффициентом влияния продольных сил и определяется для каждого сжатого элемента по формуле:

$$v = l \sqrt{\frac{N}{EI}}.$$

Следует обратить внимание на то, что для несжатых стержней, входящих в состав рамы, расчет ведется без специальных функций, по табл. 8.1. Еще одна особенность – отличие от расчетов на прочность. Реактивные усилия возникают и в статически определимых сжатых элементах (табл. 9.1, строки 7, 8.).

Специальные функции вычислены для конкретных значений $v = 0 \div 2\pi$ и приведены в табл. 9.2.

При расчете на устойчивость на раму действуют только внешние сжимающие силы, направленные вдоль сжатых элементов, и система канонических уравнений МП не имеет свободных членов. В результате получаем уравнение устойчивости в виде определителя $D(v) = 0$:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Элементы определителя вычисляются с помощью специальных функций (табл. 9.1).

При расчете рам их подразделяют на рамы с неподвижными и линейно-подвижными узлами, а также рамы с бесконечно жесткими ригелями. Ниже приводится расчет таких рам.

Таблица 9.1

Реакции в сжато-изогнутых стержнях

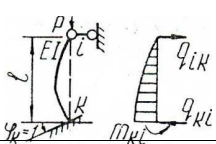
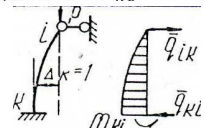
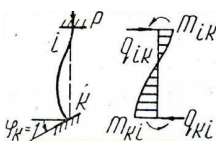
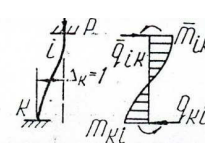
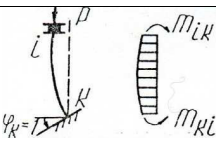
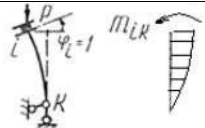
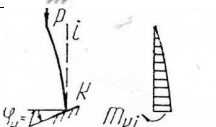
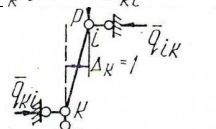
Номер п/п	Единичное воздействие и эпюра M	Моменты и реакции	Коэффициенты
1		$m_{ki} = 3 \frac{EI}{l} \varphi_1(v)$ $q_{ik} = q_{ki} = 3 \frac{EI}{l^2} \varphi_1(v)$	$v = l \sqrt{\frac{N}{EI}}, N = P$ $\varphi_1(v) = \frac{1}{\alpha(v)}$
2		$\bar{m}_{ki} = 3 \frac{EI}{l^2} \varphi_1(v)$ $\bar{q}_{ik} = \bar{q}_{ki} = 3 \frac{EI}{l^3} \eta_1(v)$	$\eta_1(v) = \frac{1}{\alpha(v)} - \frac{v^2}{3}$
3		$m_{ik} = 2 \frac{EI}{l} \varphi_3(v)$ $m_{ki} = 4 \frac{EI}{l} \varphi_2(v)$ $q_{ik} = q_{ki} = 6 \frac{EI}{l^2} \eta_3(v)$	$\varphi_2(v) = \frac{3\alpha(v)}{4\alpha^2(v) - \beta^2(v)}$ $\varphi_3(v) = \frac{3\beta(v)}{4\alpha^2(v) - \beta^2(v)}$
4		$\bar{m}_{ik} = \bar{m}_{ki} = 6 \frac{EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $\bar{q}_{ik} = \bar{q}_{ki} = 12 \frac{EI}{l^3} \eta_2(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v) = \frac{1}{\alpha(v/2)}$ $\eta_2(v) = \frac{1}{\alpha(v/2)} - \frac{1}{3} \left(\frac{v}{2}\right)^2$
5		$m_{ik} = -\frac{EI}{l} \frac{v}{\sin v}$ $m_{ki} = \frac{EI}{l} \frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$ $\frac{v}{\operatorname{tg} v}$
6		$m_{ik} = \frac{EI}{l} v \operatorname{tg} v$	$v \operatorname{tg} v$
7		$m_{ki} = \frac{EI}{l} v \operatorname{tg} v$	$v \operatorname{tg} v$
8		$\bar{q}_{ik} = \bar{q}_{ki} = \frac{EI}{l^3} v^2$	$\alpha(v) = \frac{3}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right)$ $\beta(v) = \frac{6}{v} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right)$

Таблица 9.2

Значения функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней (функции Н. В. Корноухова)

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3(1-v/\operatorname{tg} v)}; \eta_1(v) = \frac{v^2}{3(\operatorname{tg} v/v - 1)}; \varphi_2(v) = \frac{1-v/\operatorname{tg} v}{4(\frac{\operatorname{tg} v/2}{v/2} - 1)}; \varphi_3(v) = \frac{v/\sin v - 1}{2(\frac{\operatorname{tg} v/2}{v/2} - 1)}; \varphi_4(v) = \varphi_1(v/2); \eta_2(v) = \eta_1(v/2)$$

v	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$v \operatorname{tg} v$	$\varphi_1(v)$	$\eta_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$ $\eta_3(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9840
0,20	0,9866	1,0067	0,0405	0,9973	0,9840	0,9986	1,0009	0,9992	0,9959
0,40	0,9461	1,0272	0,1691	0,9895	0,9362	0,9945	1,0026	0,9973	1,0000
0,60	0,8770	1,0626	0,4105	0,9756	0,8556	0,9881	1,0061	0,9941	0,9641
0,80	0,7770	1,1152	0,8237	0,9567	0,7434	0,9789	1,0111	0,9895	0,9362
1,00	0,6421	1,1885	1,5574	0,9313	0,5980	0,9662	1,0172	0,9832	0,8999
1,10	0,5599	1,2343	2,1612	0,9164	0,5131	0,9590	1,0209	0,9798	0,8790
1,20	0,4665	1,2875	3,0866	0,8998	0,4198	0,9511	1,0251	0,9756	0,8556
1,30	0,3609	1,3493	4,6827	0,8814	0,3181	0,9424	1,0296	0,9714	0,8306
1,40	0,2415	1,4207	8,1170	0,8613	0,2080	0,9329	1,0348	0,9669	0,8035
1,50	0,1064	1,5038	21,1521	0,8393	0,0893	0,9226	1,0403	0,9620	0,7745
$\pi/2$	0	$0,5 \pi$	$\pm \infty$	0,8225	0	0,9149	1,0445	0,9581	0,7525
1,60	-0,0467	1,6007	-54,7721	0,8153	-0,0380	0,9116	1,0463	0,9567	0,7434
1,70	-0,2209	1,7143	-13,0842	0,7891	-0,1742	0,8998	1,0529	0,9510	0,7102
1,80	-0,4199	1,8483	-7,7153	0,7609	-0,3191	0,8871	1,0600	0,9449	0,6749
1,90	-0,6491	2,0078	-5,5615	0,7297	-0,4736	0,8735	1,0676	0,9383	0,6375
2,00	-0,9153	2,1995	-4,3701	0,6961	-0,6372	0,8590	1,0760	0,9313	0,5980
2,02	-0,9738	2,2425	-4,1902	0,6891	-0,6710	0,8560	1,0777	0,9299	0,5899
2,04	-1,0342	2,2872	-4,0239	0,6819	-0,7053	0,8530	1,0795	0,9285	0,5817
2,06	-1,0967	2,3337	-3,8695	0,6747	-0,7398	0,8499	1,0813	0,9270	0,5734

ν	$\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$	$\frac{\nu}{\sin \nu}$	$\nu \operatorname{tg} \nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$ $\eta_3(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,08	-1,1613	2,3822	-3,7255	0,6672	-0,7749	0,8468	1,0831	0,9255	0,5650
2,10	-1,2282	2,4328	-3,5907	0,6597	-0,8103	0,8437	1,0850	0,9240	0,5565
2,12	-1,2975	2,4855	-3,4640	0,6521	-0,8465	0,8405	1,0868	0,9225	0,5480
2,14	-1,3693	2,5406	-3,3446	0,6443	-0,8822	0,8372	1,0887	0,9210	0,5394
2,16	-1,4437	2,5981	-3,2316	0,6364	-0,9188	0,8339	1,0907	0,9195	0,5307
2,18	-1,5211	2,6582	-3,1244	0,6284	-0,9557	0,8306	1,0926	0,9180	0,5220
2,20	-1,6014	2,7211	-3,0224	0,6202	-0,9931	0,8239	1,0946	0,9164	0,5131
2,22	-1,6849	2,7869	-2,9251	0,6119	-1,0309	0,8204	1,0966	0,9148	0,5041
2,24	-1,7717	2,8560	-2,8320	0,6034	-1,0691	0,8170	1,0988	0,9132	0,4951
2,26	-1,8622	2,9284	-2,7427	0,5948	-1,1077	0,8134	1,1009	0,9116	0,4860
2,28	-1,9566	3,0044	-2,6569	0,5861	-1,1457	0,8099	1,1029	0,9100	0,4768
2,30	-2,0550	3,0843	-2,5742	0,5772	-1,1861	0,8063	1,1050	0,9083	0,4675
2,32	-2,1579	3,1684	-2,4943	0,5681	-1,2260	0,8026	1,1072	0,9066	0,4581
2,34	-2,2654	3,2570	-2,4171	0,5589	-1,2663	0,7989	1,1095	0,9049	0,4486
2,36	-2,3780	3,3503	-2,3421	0,5496	-1,3069	0,7952	1,1117	0,9032	0,4391
2,38	-2,4961	3,4489	-2,2693	0,5401	-1,3480	0,7915	1,1140	0,9015	0,4295
2,40	-2,6201	3,5531	-2,1984	0,5304	-1,3896	0,7877	1,1164	0,8998	0,4198
2,42	-2,7503	3,6634	-2,1293	0,5205	-1,4316	0,7838	1,1188	0,8991	0,4101
2,44	-2,8875	3,7804	-2,0618	0,5105	-1,4743	0,7799	1,1212	0,8963	0,4002
2,46	-3,0322	3,9046	-1,9958	0,5003	-1,5169	0,7760	1,1236	0,8945	0,3902
2,48	-3,1850	4,0367	-1,9311	0,4899	-1,5602	0,7720	1,1261	0,8927	0,3802
2,50	-3,3466	4,1773	-1,8675	0,4793	-1,6040	0,7679	1,1286	0,8909	0,3701
2,52	-3,5180	4,3274	-1,8051	0,4685	-1,6483	0,7638	1,1311	0,8890	0,3598
2,54	-3,7000	4,4879	-1,7437	0,4576	1,6929	0,7596	1,1337	0,8871	0,3495
2,56	-3,8938	4,6600	-1,6831	0,4464	-1,7381	0,7555	1,1363	0,8852	0,3391

Продолжение таблицы 9.2

ν	$\frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$	$\frac{\nu}{\sin \nu}$	$\nu \operatorname{tg} \nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\frac{\varphi_4(\nu)}{\eta_3(\nu)}$	$\eta_2(\nu)$
2,58	-4,1006	4,8448	-1,6233	0,4350	-1,7838	0,7555	1,1390	0,8833	0,3286
2,60	-4,3218	5,0436	-1,5642	0,4234	-1,8299	0,7513	1,1417	0,8814	0,3181
2,62	-4,5591	5,2603	-1,5057	0,4116	-1,8765	0,7470	1,1445	0,8795	0,3075
2,64	-4,8143	5,4906	-1,4477	0,3996	-1,9236	0,7427	1,1473	0,8776	0,2968
2,66	-5,0895	5,7425	-1,3902	0,3873	-1,9712	0,7383	1,1501	0,8756	0,2860
2,68	-5,3877	6,0175	-1,3331	0,3748	-2,0193	0,7339	1,1530	0,8736	0,2751
2,70	-5,7115	6,3176	-1,2764	0,3621	-2,0679	0,7294	1,1559	0,8716	0,2641
2,72	-6,0849	6,6469	-1,2199	0,3491	-2,1170	0,7249	1,1589	0,8696	0,2531
2,74	-6,4521	7,0098	-1,1636	0,3358	-2,1667	0,7204	1,1619	0,8675	0,2420
2,76	-6,8783	7,4114	-1,1075	0,3223	-2,2169	0,7158	1,1650	0,8655	0,2307
2,78	-7,3502	7,8584	-1,0514	0,3085	-2,2676	0,7111	1,1681	0,8634	0,2192
2,80	-7,8756	8,3585	-0,9955	0,2944	-2,3189	0,7064	1,1712	0,8613	0,2080
2,82	-8,4644	8,9218	-0,9395	0,2801	-2,3707	0,7016	1,1744	0,8592	0,1965
2,84	-9,1295	9,5610	-0,8834	0,2654	-2,4231	0,6967	1,1777	0,8571	0,1850
2,86	-9,8866	10,2918	-0,8273	0,2505	-2,4760	0,6918	1,1810	0,8550	0,1734
2,88	-10,7571	11,1360	-0,7711	0,2352	-2,5296	0,6869	1,1844	0,8528	0,1616
2,90	-11,7690	12,1212	-0,7146	0,2195	-2,5838	0,6819	1,1878	0,8506	0,1498
2,92	-12,9611	13,2860	-0,6578	0,2036	-2,6385	0,6768	1,1913	0,8484	0,1379
2,94	-14,3857	14,6831	-0,6008	0,1873	-2,6939	0,6717	1,1948	0,8439	0,1261
2,96	-16,1202	16,3898	-0,5435	0,1706	-2,7499	0,6665	1,1984	0,8416	0,1138
2,98	-18,2810	18,5220	-0,4858	0,1535	-2,8066	0,6613	1,2020	0,8393	0,1016
3,00	-21,0452	21,2585	-0,4276	0,1361	-2,8639	0,6560	1,2057	0,8370	0,0893
3,02	-24,7136	24,8990	-0,3690	0,1182	-2,9219	0,6506	1,2095	0,8347	0,0770

ν	$\frac{\nu}{\text{tg}\nu}$	$\frac{\nu}{\sin\nu}$	$\nu \text{tg}\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$ $\eta_3(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,04	-29,8215	29,9744	-0,3099	0,1000	-2,9805	0,6452	1,2133	0,8323	0,0646
3,06	-37,4220	37,5460	-0,2502	0,0812	-3,0400	0,6398	1,2172	0,8299	0,0520
3,08	-49,9432	50,0402	-0,1899	0,0621	-3,0991	0,6343	1,2212	0,8299	0,0394
3,10	-74,4888	74,5533	-0,1321	0,0424	-3,1609	0,6287	1,2252	0,8275	0,0267
3,12	-144,471	144,505	-0,0674	0,0223	-3,2225	0,6230	1,2292	0,8251	0,0139
3,14	-1971,55	1971,56	-0,0050	0,0017	-3,2848	0,6173	1,2334	0,8227	0,0011
π	$-\infty$	∞	0	0	-3,2898	0,6168	1,2336	0,8224	0
3,16	-	-	-	-0,0195	-3,3480	0,6115	1,2376	0,8203	-0,0118
3,18	-	-	-	-0,0412	-3,4120	0,6057	1,2419	0,8178	-0,0249
3,20	54,7289	-54,8227	0,1871	-0,0635	-3,4768	0,5997	1,2463	0,8153	-0,0380
3,22	40,9826	-41,1081	0,2530	-0,0864	-3,5425	0,5937	1,2507	0,8128	-0,0512
3,24	32,8168	-32,9771	0,3199	-0,1100	-3,6092	0,5876	1,2552	0,8102	-0,0646
3,26	27,4042	-27,5967	0,3878	-0,1342	-3,6767	0,5815	1,2597	0,8076	-0,0780
3,28	23,4560	-23,7740	0,4569	-0,1591	-3,7453	0,5753	1,2644	0,8050	-0,0915
3,30	20,6573	-20,9192	0,5272	-0,1847	-3,8147	0,5691	1,2691	0,8024	-0,1051
3,32	18,4107	-18,7084	0,5987	-0,2111	-3,8852	0,5628	1,2739	0,7998	-0,1187
3,34	16,6128	-16,9448	0,6715	-0,2383	-3,9568	0,5564	1,2788	0,7972	-0,1324
3,36	15,1385	-15,5067	0,7457	-0,2663	-4,0295	0,5499	1,2838	0,7945	-0,1463
3,38	13,9077	-14,3123	0,8214	-0,2951	-4,1032	0,5433	1,2889	0,7918	-0,1602
3,40	12,8632	-13,3052	0,8987	-0,3248	-4,1781	0,5366	1,2940	0,7891	-0,1742
3,42	11,9651	-12,4445	0,9775	-0,3555	-4,2540	0,5299	1,2992	0,7863	-0,1884
3,44	11,1837	-11,7007	1,0581	-0,3873	-4,3318	0,5231	1,3045	0,7835	-0,2026
3,46	10,4969	-11,0525	1,1405	-0,4202	-4,4107	0,5162	1,3099	0,7807	-0,2169
3,48	9,8878	-10,4822	1,2248	-0,4542	-4,4910	0,5092	1,3155	0,7779	-0,2313
3,50	9,3435	-9,9778	1,3111	-0,4894	-4,5727	0,5021	1,3212	0,7751	-0,2457

v	$\frac{v}{\text{tg}v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$v \text{ tg}v$	$\varphi_1(v)$	$\eta_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$ $\eta_3(v)$	$\eta_2(v)$
3,52	8,8538	-9,5279	1,3994	-0,5259	-4,6560	0,4950	1,3270	0,7723	-0,2602
3,54	8,4101	-9,1249	1,4901	-0,5638	-4,7410	0,4878	1,3328	0,7695	-0,2748
3,56	8,0061	-8,7618	1,5830	-0,6031	-4,8276	0,4805	1,3387	0,7667	-0,2894
3,58	7,6359	-8,4334	1,6784	-0,6439	-4,9160	0,4731	1,3447	0,7638	-0,3042
3,60	7,2953	-8,1352	1,7765	-0,6862	-5,0062	0,4656	1,3508	0,7609	-0,3191
3,62	6,9805	-7,8632	1,8773	-0,7303	-5,0984	0,4580	1,3571	0,7580	-0,3340
3,64	6,6882	-7,6146	1,9810	-0,7763	-5,1928	0,4503	1,3635	0,7550	-0,3491
3,66	6,4160	-7,3865	2,0878	-0,8243	-5,2895	0,4425	1,3700	0,7520	-0,3643
3,68	6,1614	-7,1767	2,1979	-0,8745	-5,3886	0,4345	1,3766	0,7488	-0,3797
3,70	5,9226	-6,9832	2,3115	-0,9270	-5,4903	0,4265	1,3834	0,7457	-0,3951
3,72	5,6977	-6,8046	2,4288	-0,9819	-5,5947	0,4184	1,3903	0,7425	-0,4107
3,74	5,4855	-6,6391	2,5499	-1,0395	-5,7020	0,4102	1,3973	0,7393	-0,4263
3,76	5,2845	-6,4557	2,6753	-1,0999	-5,8124	0,4019	1,4044	0,7361	-0,4420
3,78	5,0939	-6,3431	2,8050	-1,1634	-5,9262	0,3935	1,4117	0,7329	-0,4578
3,80	4,9123	-6,2106	2,9395	-1,2303	-6,0436	0,3850	1,4191	0,7297	-0,4736
3,82	4,7393	-6,0872	3,0790	-1,3009	-6,1650	0,3764	1,4267	0,7265	-0,4895
3,84	4,5738	-5,9720	3,2239	-1,3754	-6,2906	0,3677	1,4344	0,7232	-0,5056
3,86	4,4152	-5,8646	3,3746	-1,4543	-6,4208	0,3588	1,4423	0,7199	-0,5217
3,88	4,2629	-5,7643	3,5315	-1,5380	-6,5561	0,3498	1,4503	0,7166	-0,5379
3,90	4,1164	-5,6705	3,6949	-1,6268	-6,6968	0,3407	1,4584	0,7133	-0,5542
3,92	3,9752	-5,5828	3,8656	-1,7214	-6,8435	0,3315	1,4667	0,7099	-0,5706
3,94	3,8388	-5,5009	4,0439	-1,8227	-6,9972	0,3221	1,4752	0,7065	-0,5871
3,96	3,7068	-5,4242	4,2305	-1,9310	-7,1582	0,3126	1,4838	0,7031	-0,6037
3,98	3,5789	-5,3525	4,4260	-2,0473	-7,3274	0,3030	1,4928	0,6996	-0,6204
4,00	3,4548	-5,2854	4,6313	-2,1725	-7,5058	0,2933	1,5018	0,6961	-0,6372

ν	$\frac{\nu}{\text{тгв}}$	$\frac{\nu}{\sin \nu}$	$\nu \text{ тгв}$	$\varphi_1(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$ $\eta_3(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,02	3,3340	-5,2227	4,8471	-2,3074	-7,6942	0,2834	1,5110	0,6926	-0,6541
4,04	3,2164	-5,1640	5,0744	-2,4547	-7,8952	0,2734	1,5204	0,6891	-0,6710
4,06	3,1018	-5,1092	5,3143	-2,6142	-8,1087	0,2632	1,5301	0,6855	-0,6881
4,08	2,9897	-5,0581	5,5678	-2,7888	-8,3376	0,2529	1,5400	0,6819	-0,7053
4,10	2,8802	-5,0105	5,8365	-2,9806	-8,5836	0,2424	1,5501	0,6783	-0,7225
4,12	2,7728	-4,9662	6,1217	-3,1915	-8,8496	0,2318	1,5604	0,6747	-0,7398
4,14	2,6676	-4,9250	6,4251	-3,4262	-9,1394	0,2210	1,5709	0,6710	-0,7573
4,16	2,5642	-4,8868	6,7489	-3,6877	-9,4562	0,2101	1,5816	0,6673	-0,7749
4,18	2,4626	-4,8514	7,0952	-3,9824	-9,8050	0,1990	1,5925	0,6635	-0,7925
4,20	2,3625	-4,8188	7,4667	-4,3155	-10,196	0,1877	1,6036	0,6597	-0,8103
4,22	2,2639	-4,7889	7,8663	-4,6970	-10,633	0,1762	1,6150	0,6559	-0,8281
4,24	2,1665	-4,7615	8,2978	-5,1369	-11,129	0,1646	1,6267	0,6521	-0,8460
4,26	2,0704	-4,7364	8,7653	-5,6516	-11,701	0,1528	1,6387	0,6482	-0,8641
4,28	1,9753	-4,7133	9,2738	-6,2607	-12,367	0,1409	1,6510	0,6443	-0,8822
4,30	1,8811	-4,6934	9,8291	-6,9949	-13,158	0,1288	1,6637	0,6404	-0,9004
4,32	1,7878	-4,6753	10,4385	-7,8956	-14,116	0,1165	1,6767	0,6364	-0,9188
4,34	1,6953	-4,6593	11,1107	-9,0306	-15,309	0,1040	1,6899	0,6324	-0,9372
4,36	1,6033	-4,6455	11,8563	-10,503	-16,840	0,0912	1,7033	0,6284	-0,9557
4,38	1,5120	-4,6336	12,6884	-12,523	-18,908	0,0781	1,7170	0,6243	-0,9744
4,40	1,4210	-4,6238	13,6238	-15,330	-21,783	0,0648	1,7310	0,6202	-0,9931
4,42	1,3305	-4,6159	14,6836	-19,703	-26,215	0,0513	1,7452	0,6161	-1,0119
4,44	1,2402	-4,6100	15,8951	-27,349	-33,920	0,0376	1,7602	0,6119	-1,0309
4,46	1,1502	-4,6059	17,2943	-44,148	-50,779	0,0237	1,7754	0,6077	-1,0499
4,48	1,0603	-4,6037	18,9297	-111,57	-118,26	0,0096	1,7910	0,6034	-1,0691
4,50	0,9704	-4,6034	20,8680	227,80	221,05	-0,0048	1,8070	0,5991	-1,0884

ν	$\frac{\nu}{\text{tg}\nu}$	$\frac{\nu}{\sin\nu}$	$\nu \text{tg}\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$ $\eta_3(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,60	0,5192	-4,6292	40,7568	14,693	7,6160	-0,0807	1,8933	0,5772	-1,1861
4,70	0,0582	-4,7004	379,350	7,8186	0,4553	-0,1646	1,9919	0,5543	-1,2865
$3\pi/2$	0	$-3\pi/2$	$\pm\infty$	7,4788	0	-0,1755	2,0052	0,5514	-1,2992
4,80	-0,4216	-4,8185	-54,6474	5,4020	-2,2777	-0,2572	2,1056	0,5305	-1,3896
4,90	-0,9302	-4,9875	-25,8107	4,1463	-3,8570	-0,3612	2,2377	0,5054	-1,4954
5,00	-1,4791	-5,2142	-16,9026	3,3615	-4,9718	-0,4772	2,3924	0,4793	-1,6040
5,10	-2,0821	-5,5087	-12,4919	2,8130	-5,8570	-0,6099	2,5757	0,4520	-1,7155
5,20	-2,7577	-5,8860	-9,8053	2,3989	-6,6147	-0,7630	2,7961	0,4234	-1,8299
5,30	-3,5303	-6,3681	-7,9567	2,0668	-7,2965	-0,9423	3,0648	0,3931	-1,9477
5,40	-4,4352	-6,9879	-6,5747	1,7884	-7,9316	-1,1563	3,3989	0,3621	-2,0679
5,50	-5,5244	-7,7954	-5,4757	1,5455	-8,5379	-1,4181	3,8234	0,3291	-2,1917
5,60	-6,8801	-8,8710	-4,5581	1,3265	-9,1268	-1,7481	4,3794	0,2944	-2,3189
5,70	-8,6399	-10,3506	-3,7605	1,1235	-9,7065	-2,1804	5,1346	0,2580	-2,4495
5,80	-11,0546	-12,4839	-3,0431	0,9302	-10,283	-2,7777	6,2140	0,2195	-2,5838
5,90	-14,6362	-15,7805	-2,3783	0,7421	-10,861	-3,6678	7,8726	0,1790	-2,7218
6,00	-20,6178	-21,4731	-1,7461	0,5551	-11,445	-5,1589	10,727	0,1361	-2,8639
6,10	-32,9263	-33,4867	-1,1301	0,3656	-12,038	-8,2355	16,739	0,0906	-3,0102
6,20	-74,3604	-74,6184	-0,5170	0,1700	-12,643	-18,594	37,308	0,0424	-3,1609
2π	$-\infty$	$-\infty$	0	0	-13,139	$-\infty$	$+\infty$	0	-3,2898

9.4.2. Расчет на устойчивость рам с неподвижными узлами

Рамами с линейно-неподвижными узлами называются такие рамы, у которых степень кинематической неопределимости метода перемещений определяется числом жестких узлов ($K = K_1$). Линейные перемещения в узлах таких систем отсутствуют ($K_2 = 0$). В таких рамах формой потери устойчивости является местная, т. е. изгиб стержней в момент выпучивания связан лишь с поворотом жестких узлов (рис. 9.2, 9.3).

При расчете рам с неподвижными узлами на устойчивость рационально использовать метод перемещений. В этом случае достаточно наложить защемления на внеопорные жесткие узлы и записать уравнения устойчивости в форме 9.8.

Пример 9.4

Определить величину критической силы для рамы (рис. 9.20) с неподвижными узлами, размеры элементов рамы и нагрузки считаем известными.

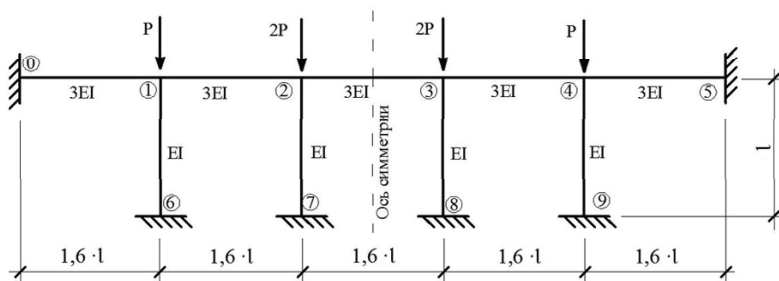


Рис. 9.20

Данная рама имеет ось симметрии в пролете 2-3.

Здесь возможны две формы потери устойчивости: симметричная (рис. 9.21), кососимметричная (рис. 9.22), деформированное состояние которых представлено на рис. 9.21, 9.22.

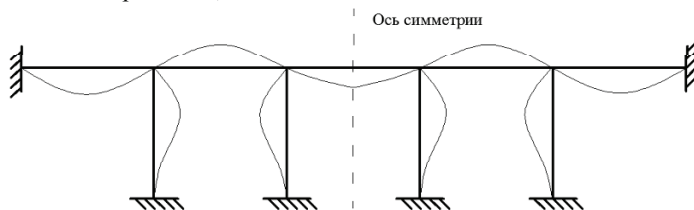


Рис. 9.21

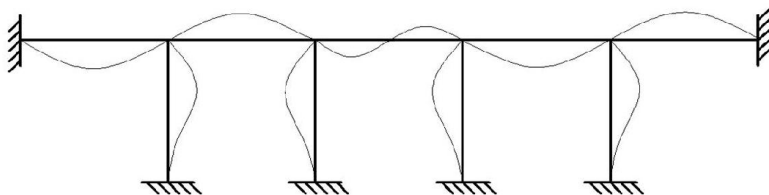


Рис. 9.22

Из расчетов на прочность симметричных систем известно, что при их расчете переходят к более простой расчётной схеме в виде половины рамы. Если симметричная система нагружена симметричной нагрузкой, то на оси симметрии ставят ползуны (рис. 9.23, а). А расчет симметричной системы на кососимметричную нагрузку сводится к расчету схемы с шарнирно-подвижной опорой, введённой на оси симметрии (рис. 9.23, б).

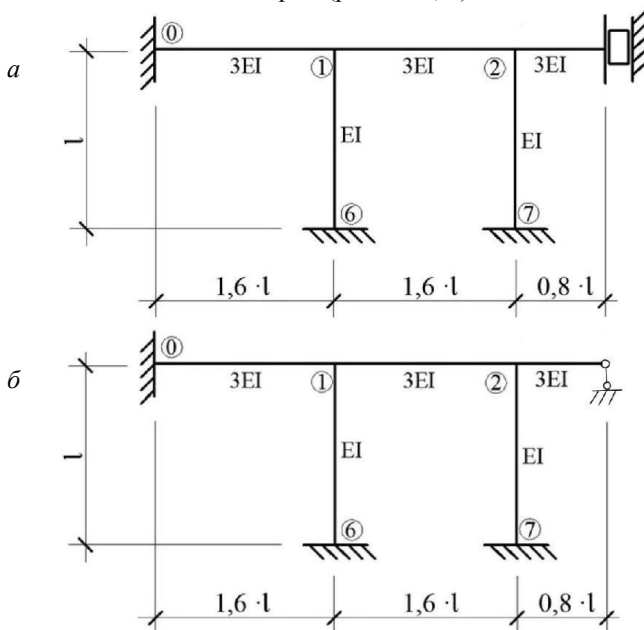


Рис. 9.23

9.4.3. Расчет критической силы $P_{кр}$ для симметричной формы потери устойчивости

Рассматриваем раму из примера 9.4.

1. Формируем расчетную схему.

При симметричной форме потери устойчивости на оси симметрии отсутствует поперечная сила. Расчетная схема представлена на рис. 9.24. В сечении на оси симметрии установлен ползун, допускающий перемещение в направлении нормали к оси стержня.

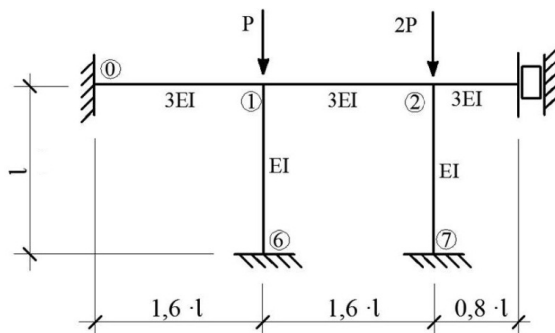


Рис. 9.24

2. Определяем продольные силы в стержнях, выражая их через заданную узловую нагрузку (рис. 9.25, а, б). Из равновесия узлов 1 и 2 находим усилия в стойках (рис. 9.25).

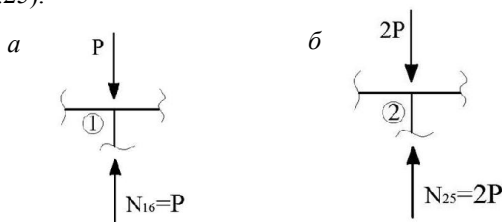


Рис. 9.25

3. По продольным силам определяем коэффициенты влияния для сжатых стоек.

$$\nu_{16} = l_{16} \sqrt{\frac{N_{16}}{EI_{16}}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \nu,$$

$$\nu_{27} = l_{27} \sqrt{\frac{N_{27}}{EI_{27}}} = l \sqrt{\frac{2P}{EI}} = l\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} = 1,41 \cdot \nu.$$

4. Выполняем решение с приближенной оценки критического параметра. Для этого расчленим систему (рис. 9.24) на простые системы (стойки с примыкающими ригелями [1-2-7-3'] (рис. 9.26) и [0-1-6-2] (рис. 9.28)).

4.1. Для стойки 2-7 (рис. 9.26) используем метод перемещений. Рассматриваемая часть представляет собой систему один раз кинематически неопределимую. Вводим защемление в узле 2 и, используя табл. 9.2, находим концевые моменты в стержнях (рис. 9.26, б) и реактивное усилие (момент) r_{22} .

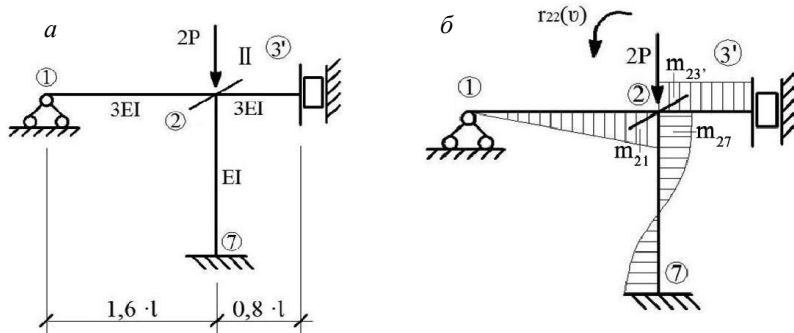


Рис. 9.26

4.2. Из условия равновесия узла 2 (рис. 9.27) запишем уравнение устойчивости для элементарной системы (рис. 9.26).

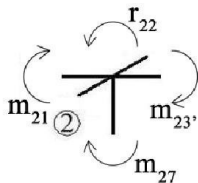


Рис. 9.27

$$m_{21} = \frac{3 \cdot 3 \cdot EI}{1,6 \cdot l} = 5,625 \frac{EI}{l},$$

$$m_{23'} = \frac{3 \cdot EI}{l_{23}} = \frac{3 \cdot EI}{0,8l} = 3,75 \frac{EI}{l},$$

$$m_{27} = \frac{4 \cdot EI}{l} \varphi_2(v_{25}).$$

Здесь моменты m_{ik} определены от поворота защемления II против часовой стрелки на угол $\varphi = 1$ и взяты из табл. 9.1.

Аналогично, как и при расчете устойчивости неразрезной балки, составляем условие устойчивости, которое имеет вид:

$$r_{11} = 5,625 + 3,75 + 4 \cdot \phi_2(v_{27}) = 0.$$

Здесь $\frac{EI}{l}$ опущено. Откуда $\varphi_2(\nu_{27}) = -2,3437$.

По таблице специальных функций (см. табл. 9.2) находим параметр $\nu_{27} = 5,73$. Этому параметру соответствует критический параметр продольной силы:

$$N_{kp} = \nu^2 \frac{EI}{l^2}.$$

С учетом продольной силы N_{27} получаем $2P_{kp} = \nu_{27}^2 \frac{EI_{27}}{l_{27}^2}$, откуда

$$P'_{kp} = 5,73^2 \frac{EI}{2l^2} = 16,42 \frac{EI}{l^2}.$$

Таким образом, определена критическая сила для элементарной части, связанной со стойкой 2-7.

$$P'_{kp} = 16,42 \frac{EI}{l^2}.$$

5. Приближенный расчет критической силы элементарной системы, включающей стойку 1-6. Расчетная схема этой части рамы представлена на рис. 9.28, а, а эпюра изгибающих моментов m_{ik} на рис. 9.28, б.

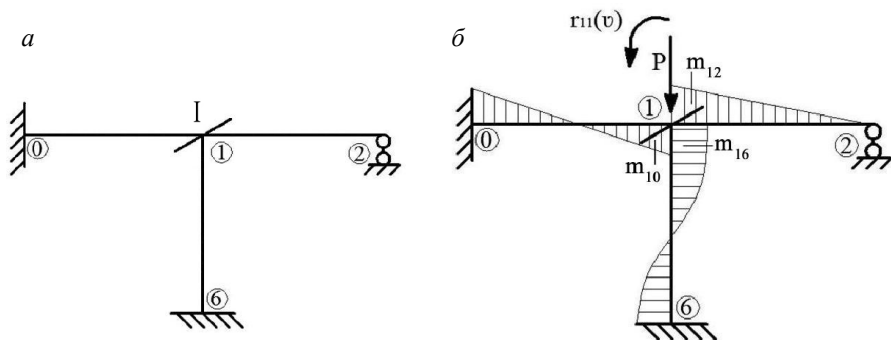


Рис. 9.28

Расчет ведем аналогично.

$$r_{11} = m_{10} + m_{12} + m_{16} = 0.$$

$$m_{10} = \frac{4 \cdot 3 \cdot EI}{1,6 \cdot l} = 7,5 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{12} = \frac{3 \cdot 3 \cdot EI}{1,6 \cdot l} = 5,625 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{16} = \frac{4 \cdot EI}{l} \varphi_2(\nu_{14}).$$

С учетом значений моментов m_{ik} получаем уравнение устойчивости:

$$r_{11} = 7,5 + 5,625 + 4 \cdot \varphi_2(\nu_{16}) = 0,$$

отсюда $\varphi_2(\nu_{16}) = -3,2811$. По табл. 9.2 находим $\nu_{16} = 5,86$.

С учетом ν находим критическую силу стойки 1-6:

$$P_{кр}^{II} = \nu_{16}^2 \frac{EI}{l^2} = 5,86^2 \frac{EI}{l^2} = 34,34 \frac{EI}{l^2}.$$

Сопоставляя $P_{кр}^I$ и $P_{кр}^{II}$, видим, что $P_{мин}^{кр} = P_{кр}^I = 16,42 \frac{EI}{l^2}$, т. е. наиболее опасной является стойка 2-7. Принимаем при симметричной форме потери устойчивости для системы в качестве приближенного значения $P_{кр}^I = 16,42 \frac{EI}{l^2}$.

6. Выполняем проверочный расчет для симметричной формы потери устойчивости (точное решение).

Производим решение на основе метода перемещений, рассматривая половину всей рамы без расчленения. В расчетной системе прикладываем внешние силы с учетом найденного приближенного значения $P_{кр}$ (рис. 9.29).

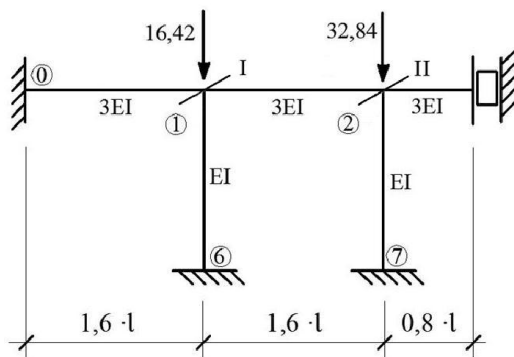


Рис. 9.29

1. Найдем параметр ν , исходя из установления приближенного значения $P_{кр}$:

$$\nu = l \sqrt{\frac{N_i}{EI}}.$$

$$\nu_{16} = l \sqrt{\frac{16,42 EI}{l^2 EI}} = 4,05 = \nu.$$

$$\nu_{27} = l_{27} \sqrt{\frac{N_{27}}{EI_{27}}} = \sqrt{2 \cdot 16,42} = 1,41 \cdot \nu = 5,73.$$

2. При расчете по методу перемещений система (рис. 9.29) дважды кинематически неопределима, поэтому введем два защемления – I и II.

Уравнение устойчивости будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} r_{11}(\nu) & r_{12}(\nu) \\ r_{21}(\nu) & r_{22}(\nu) \end{vmatrix} = 0.$$

3. Определяем коэффициенты уравнения устойчивости.

3.1. Поворачиваем первое защемление на угол $\varphi_1 = 1$.

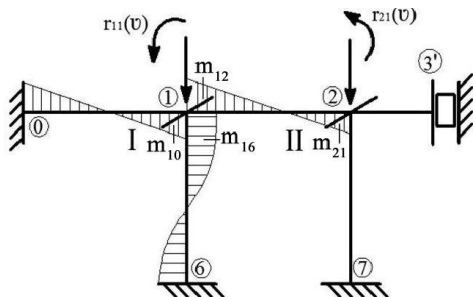


Рис. 9.30

Концевые моменты m_{10} , m_{12} , m_{16} определяем по табл. 9.1.

$$m_{10} = \frac{4 \cdot 3 \cdot EI}{1,6 \cdot l} = 7,5 \frac{EI}{l} \quad (\text{табл. 8.1, схема 3}); \quad m_{12} = m_{10} = 7,5 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{16} = \frac{4 \cdot EI}{l} \phi_2(\nu_{16}) = \frac{4 \cdot EI}{l} \phi_2(4,03) = 4 \cdot 0,2683 \frac{EI}{l} = 1,073 \frac{EI}{l} \quad (\text{табл. 9.1}).$$

3.2. Затем поворачиваем второе защемление на угол $Z_2 = 1$ (рис. 9.31).

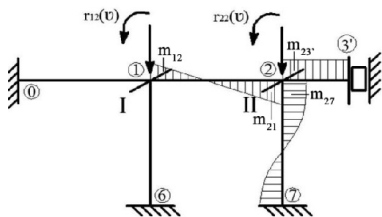


Рис. 9.31

Аналогично определяем концевые моменты.

$$m_{21} = 7,5 \frac{EI}{l}; \quad m_{12} = 3,75 \frac{EI}{l}; \quad m_{23} = \frac{3 \cdot EI}{0,8l} = 3,75 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{27} = \frac{4 \cdot EI}{l} \phi_2(\nu_{27}) = \frac{4 \cdot EI}{l} \phi_2(5,73) = -4 \cdot 2,3388 \frac{EI}{l} = -9,355 \frac{EI}{l} \quad (\text{табл. 9.2}).$$

4. Реактивные моменты в наложенных связях находим из равновесия узлов 1 и 2. Из рис. 9.30 имеем:

$$r_{11}(\nu) = m_{10} + m_{12} + m_{16} = (7,5 + 7,5 + 1,073) \frac{EI}{l} = 16,07 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{12} = r_{21} = 3,75 \frac{EI}{l}.$$

Из рис. 9.31 имеем: $r_{22} = m_{21} + m_{23} + m_{27} = (7,5 + 3,75 - 9,355) \frac{EI}{l} = 1,895 \frac{EI}{l}.$

С учетом реактивных моментов, выражение $D_1(\nu)$ (множитель $\frac{EI}{l}$ опущен) имеет вид:

$$D_1(\nu) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0, \text{ или } 16,07 \cdot 1,895 - 3,75^2 = 16,39.$$

Отсюда следует, что $D_1(\nu) = 16,39 \neq 0$, при этом $D_1(\nu) = 16,39 > 0$.

Значит, действительное $P_{кр}$ имеет большее значение.

5. Принимаем $P_{кр} = 16,6 \frac{EI}{l^2}$, тогда:

$$\nu_{16} = \sqrt{16,6} = 4,074.$$

$$\nu_{17} = \sqrt{33,2} = 1,41 \cdot \nu = 1,41 \cdot 4,07 = 5,76.$$

С учетом этого имеем:

$\varphi_2(\nu)$ находим по табл. 9.2.

$$m_{16} = \frac{4 \cdot EI}{l} \varphi_2(4,07) = 4 \cdot 0,258 \frac{EI}{l} = 1,032 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{27} = \frac{4 \cdot EI}{l} \varphi_2(5,76) = 4 \cdot (-2,513) \frac{EI}{l} = -10,052 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{11} = m_{10} + m_{12} + m_{16} = (15 + 1,032) \frac{EI}{l} = 16,032 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{22} = m_{21} + m_{23} + m_{27} = (11,25 - 10,052) \frac{EI}{l} = 1,198 \frac{EI}{l}.$$

Решаем уравнение устойчивости, вычисляя определитель:

$$D_2(\nu) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 16,032 \cdot 1,198 - 3,75^2 = 5,15.$$

$$D_2(\nu) = 19,21 - 14,06 = 5,15 \neq 0.$$

Определитель больше нуля. Значит, действительное значение $P_{кр}$ еще больше.

6. Проводим третью попытку. Принимаем $P_{\text{до}} = 16,75 \frac{EI}{l^2}$, тогда:

$$\nu_{16} = \sqrt{16,75} = 4,0926.$$

$$\nu_{27} = \sqrt{33,3} = 1,41 \cdot \nu = 1,41 \cdot 4,09 = 5,77.$$

С учетом этого имеем:

$$m_{27} = 4 \cdot \phi_2(\nu_{27}) = 4 \cdot \phi_2(5,77) = 4 \cdot (-2,597) \frac{EI}{l} = -10,388 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{16} = 4 \cdot \phi_2(\nu_{16}) = 4 \cdot 0,2476 \frac{EI}{l} = 0,991 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{11} = m_{10} + m_{12} + m_{16} = (7,5 + 7,5 + 0,991) \frac{EI}{l} = 15,991 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{22} = m_{21} + m_{23} + m_{27} = (7,5 + 3,75 - 10,388) \frac{EI}{l} = 0,862 \frac{EI}{l}.$$

В выражении $D_3(\nu)$ множитель $\frac{EI}{l}$ опущен.

$$D_3(\nu) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 15,991 \cdot 0,422 - 3,75^2 = -0,278.$$

Определитель меньше нуля. $D_3(\nu) = -0,278 < 0$.

7. По двум последним попыткам на основе линейной интерполяции уточняем величину параметра $\nu_{кр}$ на участке $\nu_3 - \nu_2 = 4,09 - 4,07 = 0,02$:

$$\frac{4,07}{x} = \frac{4,09}{0,02 - x}.$$

Интерполируем: $x = \frac{4,07 \cdot 0,02}{4,07 + 4,09} = 0,01$.

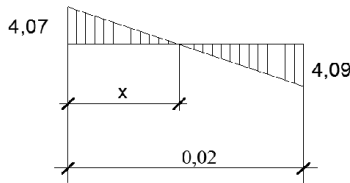


Рис. 9.32

С учетом этого, для рассматриваемой части рамы

$$\nu_{\text{ед}} = 4,07 + 0,001 = 4,08,$$

наименьший параметр критической системы сил

$$P_{\text{ед}} = 4,08^2 \frac{EI}{l^2} = 16,65 \frac{EI}{l^2}.$$

9.4.4. Расчет критической силы $P_{кр}$ для кососимметричной формы потери устойчивости

Расчет рассматриваем применительно к *примеру 9.4* (рис. 9.20).

Порядок расчета

1. Принимаем расчетную схему с учетом косои симметрии. На оси симметрии вводим шарнирную опору (рис. 9.33).

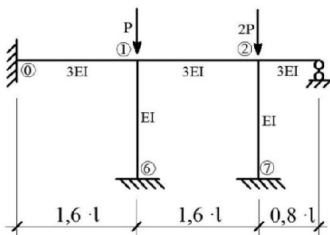


Рис. 9.33

2. Начинаем с приближенного расчета для двух элементарных рам, одна из которых связана со стойкой 1-6, а другая – со стойкой 2-7 (рис. 9.34).

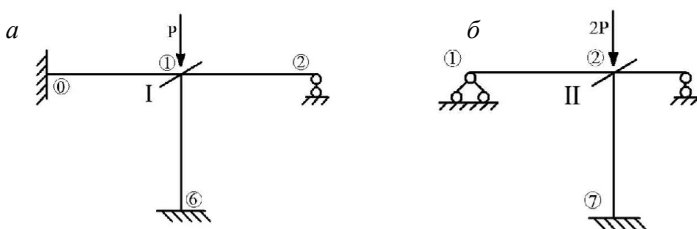


Рис. 9.34

Для первого случая (рис. 9.34, а) $P_{кр}$ уже находили: $P_{кр} = 34,34 \frac{EI}{l^2}$.

Рассмотрим второй случай (рис. 9.34, б).

3. Аналогично, как выше, используя метод перемещений, находим моменты в концевых сечениях m_{ik} по табл. 8.1 и строим их эпюру (рис. 9.35).

$$m_{21} = \frac{3 \cdot 3 \cdot EI}{1,6 \cdot l} = 5,625 \frac{EI}{l}; \quad m_{23} = \frac{3 \cdot 3 \cdot EI}{0,8l} = 11,25 \frac{EI}{l};$$

Для стойки 2-7 используем формулу таблицы 9.1 (строка 3):

$$m_{27} = \frac{4 \cdot EI}{l} \varphi_2(v_{27}),$$

Тогда $r_{22} = 5,625 + 11,25 + 4 \cdot \varphi_2(v_{27}) = 0$, откуда

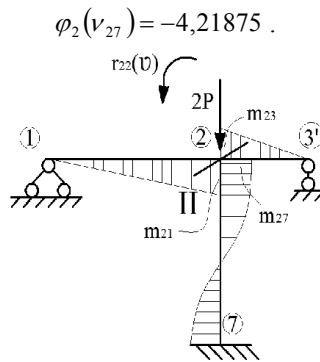


Рис. 9.35

Используя табл. 9.2 специальных функций, определяем соответствующий $\varphi_2(v_{27})$ параметр: $v_{27} = 5,95$.

Тогда, с учетом этого параметра, находим критическую силу в стойке 2-7 по формуле:

$$N_{кр} = v^2 \frac{EI}{l^2}.$$

С учетом действия нагрузки в узле 2 имеем:

$$2P_{кр} = 5,95^2 \frac{EI}{l^2} = 35,40 \frac{EI}{l^2}, \text{ отсюда } P_{кр} = 35,40 \frac{EI}{2l^2} = 17,7 \frac{EI}{l^2}.$$

Таким образом, для кососимметричной формы потери устойчивости критическая сила $P_{кр} = 17,7 \frac{EI}{l^2}$.

4. Проводим проверку на основе метода перемещений для всей системы (рис. 9.34) (точное решение).

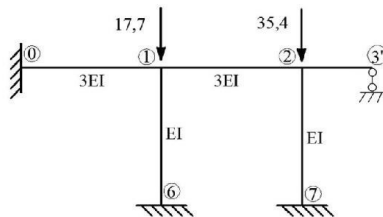


Рис. 9.36

Определяем коэффициенты влияния для сжатых стоек 1-6, 2-7, используя приближенное значение $P_{кр} = 17,7 \frac{EI}{l^2}$.

$$\nu_{16} = \nu = \sqrt{177} = 4,21; \quad \nu_{27} = \sqrt{354} = 1,41 \cdot \nu = 5,95.$$

5. Поворачиваем защемление I на угол $Z_1 = 1$.

Строим эпюры моментов m_{ik} от этого поворота, используя табличные формулы (табл. 9.1) для стоек и табл. 8.1 для ригелей.

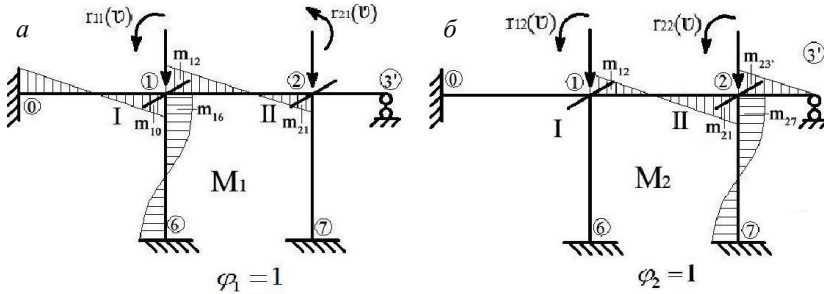


Рис. 9.37

От поворота защемления I на угол $Z_1 = 1$ вычисляем концевые моменты m_{ik} по формулам табл. 8.1, схема 3.

$$m_{10} = m_{12} = 4 \frac{3EI}{1,6l} = 7,5 \frac{EI}{l}.$$

Аналогично:

$$m_{21} = 3,75 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{16} = \frac{4 \cdot EI}{l} \varphi_2(4,21) = 4 \cdot 0,1895 \frac{EI}{l} = 0,7278 \frac{EI}{l} \text{ (см. табл. 9.2, схема 3).}$$

От поворота защемления II на угол $Z_2 = 1$ изгибающие моменты равны.

$$m_{21} = 7,5 \frac{EI}{l}; \quad m_{12} = 3,75 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{27} = \frac{4 \cdot EI}{l} (-4,3075) = -17,23 \frac{EI}{l} \text{ (см. табл. 9.2, схема 3).}$$

$$m_{23} = 3 \frac{3EI}{0,8l} = 11,25 \frac{EI}{l} \text{ (см. табл. 8.1, схема 1).}$$

Реакции в наложенных связях I и II находим из равновесия узлов, вырезанных из эпюр M_1 и M_2 (рис. 9.38):

$$r_{11} = m_{10} + m_{12} + m_{16} = (7,5 + 7,5 + 0,7278) \frac{EI}{l} = 15,73 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{12} = r_{21} = 3,75 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{22} = m_{21} + m_{23} + m_{27} = ((7,5 + 11,25) - 17,23) \frac{EI}{l} = 1,52 \frac{EI}{l}.$$

6. Решаем уравнение устойчивости методом последовательных приближений. Вычисляем определитель, при этом общий множитель $\frac{EI}{l}$ опускаем.

$$D(\nu) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 15,73 \cdot 1,52 - 14,062 = 9,85 > 0.$$

Поскольку определитель $D(\nu) > 0$, повторим решение уравнения устойчивости.

7. Делаем вторую попытку. Возьмем $P_{кр} = 17,8 \frac{EI}{l^2}$.

$$\nu_{16} = \sqrt{17,8} = 4,22.$$

$$\nu_{27} = 1,41 \cdot \nu = 1,41 \cdot 4,22 = 5,97.$$

С учетом этого имеем:

$$m_{16} = 4 \cdot 0,1762 \frac{EI}{l} = 0,705 \frac{EI}{l}.$$

$$m_{27} = 4 \cdot (-4,618) \frac{EI}{l} = -18,473 \frac{EI}{l}.$$

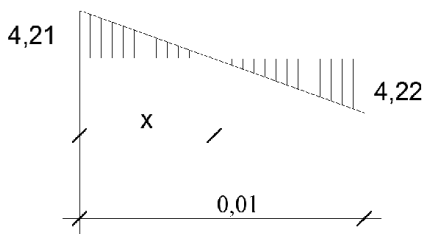
$$r_{11} = 7,5 + 7,5 + 0,705 = 15,705 \frac{EI}{l}.$$

$$r_{22} = 7,5 + 11,25 - 18,473 = 0,277 \frac{EI}{l}.$$

$$D(\nu) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 15,705 \cdot 0,277 - 14,062 = -9,71 < 0.$$

8. На основе двух попыток решения уравнения устойчивости уточняем критический параметр ν путем линейного интерполирования на участке $\nu_2 - \nu_1 = 4,22 - 4,21 = 0,01$.

Значит, значение $P_{кр}$ надо уменьшить.



$$x = \frac{4,21 \cdot 0,01}{4,21 + 4,22} = 0,005$$

Рис. 9.38

Следовательно, для рассматриваемой части рамы:

$$\nu_{\text{ед}} = 4,21 + 0,005 = 4,2105$$

С учетом этого наименьший параметр критической системы сил:

$$P_{\text{ед}} = (4,2105)^2 \frac{EI}{l^2} = 17,728 \frac{EI}{l^2}$$

9. Сопоставляя значения критических сил для симметричной и кососимметричной форм потери устойчивости, видим, что наиболее опасной является симметричная форма потери устойчивости.

Таким образом, для всей системы в качестве критической силы принимаем

$$P_{\text{кр}} = 16,67 \frac{EI}{l^2}$$

Сравнивая его с ранее найденным приближенным значением, видим, что

$$P_{\text{кр}}^{\text{прибл}} = 16,42 \frac{EI}{l^2} \text{ незначительно отличается от } P_{\text{кр}}^{\text{точн}} = 16,67 \frac{EI}{l^2}.$$

$$\delta \% = \frac{16,67 - 16,42}{16,67 + \frac{16,42}{2}} \cdot 100 \% = 1,5 \%$$

Иными словами, рамы с неподвижными узлами можно рассчитывать приближенным способом, в соответствии с которым критическая сила определяется отдельно для каждой стойки с примыкающими к ней ригелями.

Наименьшая из всех определенных таким образом критических сил может быть принята за наименьший параметр критической системы сил. Точность решения вполне достаточна для практики.

9.5. Рамы с линейно-подвижными узлами

9.5.1. Понятия

В рамах с линейно-подвижными узлами (рис. 9.39, а) при потере устойчивости вследствие изгиба стержней возникают поворот узлов и их линейное смещение. В этом случае имеет место общая форма потери

устойчивости, и при вычислении критической силы $P_{кр}$ необходимо учитывать работу всех стоек, так как при любом распределении внешней нагрузки стойки участвуют в работе по сопротивлению нагрузке, независимо от того, нагружены они узловой нагрузкой или нет.

Пример 9.5

На примере рамы (рис. 9.39, а) рассмотрим порядок расчета устойчивости на основе метода перемещений. Узловая нагрузка, жесткости и длина стержней показаны на расчетной схеме.

Требуется определить значение критического параметра нагрузки $P_{ед}$ и вычислить критические силы стоек $P_{1кр}$, $P_{2кр}$ и приведенные длины соответствующих стоек.

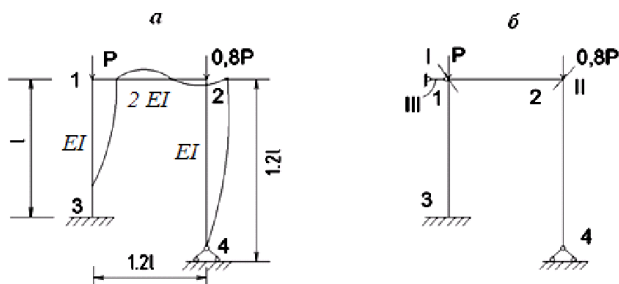


Рис. 9.39

Рассмотрим подробнее порядок проверки устойчивости рам методом перемещений, используя расчетную схему (рис. 9.40, а). Узловые силы, жесткости и длины стержней указаны на схеме. Основная система рамы получается из исходной путем наложения защемлений на узлы 1 и 2 (связи I и II) и введения стерженька на уровне ригеля (связь III, рис. 9.40, б). Наложенные связи превращают основную систему в совокупность стержней с различными закреплениями на концах.

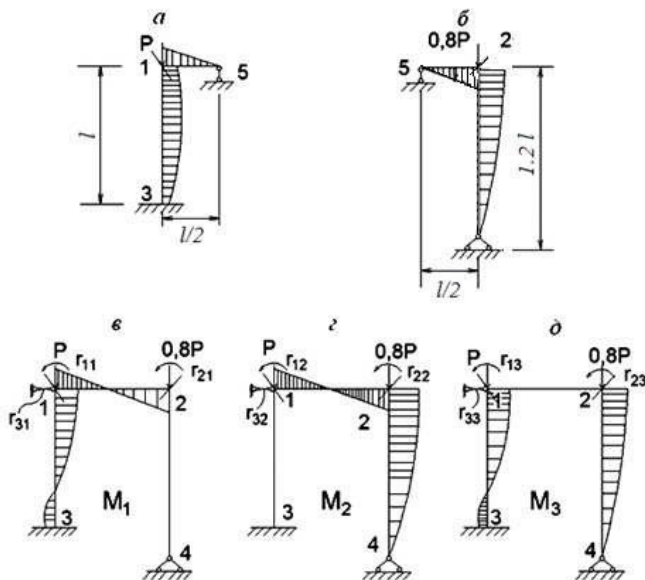


Рис. 9.40

1. В момент, предшествующий потере устойчивости, стойкости остаются прямыми, поэтому продольные усилия равны:

$$N_{13} = P, \quad N_{24} = 0,8P$$

Коэффициенты влияния продольных сил выразим через один параметр:

$$v_{13} = v = 1 \sqrt{\frac{N}{EI}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

$$v_{24} = 1,21 \sqrt{\frac{N_{24}}{EI_{24}}} = 1,21 \sqrt{\frac{0,8P}{EI}} = 1,073v.$$

2. Найдём вначале приближенное значение $P_{кр}$. Будем полагать, что при общей форме потери устойчивости точка перегиба упругой линии находится в середине ригеля 1-2 рамы (рис. 9.39, а). Это позволит заданную систему расчленить на две элементарные системы, представляющие собой стойки с примыкающими подвижными ригелями [8] (рис. 9.40, а, б).

Накладывая защемление на жесткий узел рамы (рис. 9.40, а) и поворачивая его против часовой стрелки на угол, равный единице, запишем в соответствии с методом перемещений уравнение устойчивости

$$r_{11}(v) = 0, \quad \text{где} \quad r_{11}(v) = m_{13} + m_{15}.$$

С учетом выражений для моментов (см. табл. 9.1) уравнение примет вид:

$$\frac{v}{\operatorname{tg} v} \frac{EI}{l} + 3 \frac{2EI}{l/2} = 0,$$

откуда

$$\frac{v}{\operatorname{tg} v} = -12,0.$$

Обращаясь к табл. 9.2, получим: $v = v_{13} = 2,905$.

Этому значению соответствует

$$(P_{\text{кр}})_{13} = 2,905^2 \frac{EI}{l^2} = 8,44 \frac{EI}{l^2}.$$

Для элементарной схемы (рис. 9.40, б) аналогично получим уравнение устойчивости:

$$v_{24} \operatorname{tg} v_{24} \frac{EI}{1,2l} + 3 \frac{2EI}{l/2} = 0,$$

или, после упрощения, $v_{24} \operatorname{tg} v_{24} = -14,4$.

По табл. 9.2 устанавливаем параметр

$$v_{24} = 1,697,$$

которому соответствует критическая сила

$$(0,8P_{\text{кр}})_{24} = 1,697^2 \frac{EI}{(1,2l)^2}$$

или

$$(P_{\text{кр}})_{24} = 2,5 \frac{EI}{l^2}.$$

Различие между критическими силами для элементарных систем на рис. 9.40, а и 9.40, б оказалось существенным (\sim в 3,5 раза). Ясно, что для заданной системы (рис. 9.39, а) критический параметр должен занимать промежуточное значение между ними.

Принимаем $P_{\text{кр}}$ для рамы в целом, как «среднее» значение критических сил для каждой элементарной системы по формуле:

$$P_{\text{кр}} = \frac{1 \cdot 8,44 + 0,8 \cdot 2,50}{1 + 0,8} \cdot \frac{EI}{l^2} = 5,8 \frac{EI}{l^2}.$$

и выполним проверку по методу перемещений.

3. Для основной системы (рис. 9.40, б) с тремя наложенными связями уравнение устойчивости имеет вид:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & r_{13}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & r_{23}(v) \\ r_{31}(v) & r_{32}(v) & r_{33}(v) \end{vmatrix} = 0. \quad (9.13)$$

Коэффициенты $r_{ik}(v)$ этого уравнения определяем из условия равновесия узлов 1, 2 и ригеля 1-2 по эпюрам M_1, M_2 и M_3 от единичных воздействий (см. табл. 9.1) поворота защемления I и II и линейного смещения связи III.

От единичного поворота защемления в узле 1 получим (рис. 9.40, в):

$$r_{11}(v) = m_{13} + m_{12} = [4\varphi_2(v) + 8] \frac{EI}{l};$$

$$r_{21}(v) = m_{21} = 4 \frac{EI}{l};$$

$$r_{31}(v) = q_{13} = 6\eta_3(v) \frac{EI}{l^2}.$$

Поворот защемления в узле 2 на угол, равный единице, позволяет определить (рис. 9.40, з):

$$r_{12}(v) = m_{12} = 4 \frac{EI}{l};$$

$$\begin{aligned} r_{22}(v) = m_{24} + m_{21} &= 3\varphi_1(1,073v) \frac{EI}{1,2l} + 8 \frac{EI}{l} = \\ &= [2,5\varphi_1(1,073v) + 8] \frac{EI}{l}; \end{aligned}$$

$$r_{32}(v) = q_{24} = 3\varphi_1(1,073v) \frac{EI}{(1,2l^2)} = 2,08\varphi_1(1,073v) \frac{EI}{l^2}.$$

Смещение линейной связи на единицу вправо дает (рис. 9.40, д):

$$r_{13}(v) = m_{13} = 6\varphi_4 \frac{EI}{l^2};$$

$$r_{23}(v) = m_{24} = 3\varphi_1(1,073v) \frac{EI}{(1,2l)^2} = 2,08\varphi_1(1,073v) \frac{EI}{l^2};$$

$$\begin{aligned} r_{33}(v) = q_{13} + q_{24} &= 12\eta_2(v) \frac{EI}{l^3} + 3\eta_1(1,073v) \frac{EI}{(1,2l)^3} = \\ &= [12\eta_2(v) + 1,74\eta_1(1,073v)] \frac{EI}{l^3}. \end{aligned}$$

Побочные коэффициенты $r_{ik}(v) = r_{ki}(v)$ равны на основании теоремы о взаимности реакций. При этом надо учесть, что $\varphi_4(v) = \eta_3(v)$.

4. Уравнение устойчивости (9.13) решаем численно. Для первой попытки принимаем приближенное значение $P_{кр} = 5,16 \frac{EI}{l^2}$, которому соответствует $v = \sqrt{5,16} = 2,27$ и $1,073v = 2,44$. По табл. 9.2 определяем значения функций

$$\begin{aligned} \varphi_2(2,27) &= 0,815; & \varphi_4(2,27) &= \eta_3(2,27) = 0,911; & \eta_2(2,27) &= 0,481; \\ \varphi_1(2,44) &= 0,511, & \eta_1(2,44) &= -1,474. \end{aligned}$$

Указанным значениям функции соответствуют коэффициенты:

$$r_{11}(v) = (4 \cdot 0,815 + 8) EI/l = 11,26EI/l;$$

$$r_{21}(v) = r_{12}(v) = 4EI/l;$$

$$r_{31}(v) = r_{13}(v) = 6 \cdot 0,911EI/l^2 = 5,47EI/l^2;$$

$$r_{22}(v) = (2,5 \cdot 0,511 + 8)EI/l = 9,28EI/l;$$

$$r_{23}(v) = r_{32}(v) = 2,08 \cdot 0,511EI/l^2 = 1,06EI/l^2;$$

$$r_{33}(v) = (12 \cdot 0,481 - 1,74 \cdot 1,474)EI/l^3 = 4,36EI/l^3.$$

Внесем полученные значения коэффициентов в определитель (9.13). Раскрывая последний, найдем (общий множитель опускаем):

$$\begin{aligned} D_1(v) &= 11,26 \cdot 9,28 \cdot 4,36 + 2(4 \cdot 1,06 \cdot 5,47) - 11,26 \cdot 1,06^2 - 9,28 \cdot 5,47^2 - \\ &4,54 \cdot 4^2 = 148,94 > 0. \end{aligned}$$

Так как $D_1(v) > 0$, то повторяем решение при несколько большем значении коэффициента v .

Для второй попытки принимаем $v = 2,35$ и $1,073v = 2,52$. В этом случае $\varphi_2(2,35) = 0,801$; $\varphi_4(2,35) = 0,904$; $\eta_2(2,35) = 0,444$;

$$\varphi_1(2,35) = 0,474; \quad \eta_1(2,35) = -1,604.$$

Определяя числовые значения коэффициентов $r_{ik}(v)$ и раскрывая определитель, получаем

$$D_2(v) = -6,47 < 0.$$

Интерполируя результат по двум попыткам, находим

$$v_{\text{кр}} = v_{\text{min}} = 2,27 + 0,077 = 2,347,$$

которому соответствует наименьший параметр критической системы сил для заданной рамы (см. рис. 9.39):

$$P_{\text{кр}} = 2,347^2 \frac{EI}{l^2} = 5,51 \frac{EI}{l^2},$$

при этом $(l_0)_{13} = \frac{\pi}{v} l = 1,34l$, а $(l_0)_{24} = \frac{\pi}{1,073v} 1,2l = 1,25(1,2l)$.

Истинное значение $P_{\text{кр}} = 5,51 \frac{EI}{l^2}$ превышает приближенное значение $P_{\text{кр}} = 5,8 \frac{EI}{l^2}$ лишь на 5,3 %.

Следовательно, приближенное значение наименьшего параметра критической системы сил для сложной рамы с линейно-подвижными узлами можно определить как среднее значение параметра для элементарных подвижных систем (стойки с примыкающими подвижными ригелями), если жесткости стоек не очень сильно отличаются между собой.

В заключение отметим, что для одной и той же упругой рамы с линейно-подвижными узлами суммарное значение внешней нагрузки (несущая способность системы устойчивости) остается неизменным. Для рассмотренной схемы (см. рис. 9.40, а) несущая способность по устойчивости равна

$$\Sigma P_{\text{кр}} = (1 + 0,8)P_{\text{кр}} = 1,8 \cdot 5,51 \frac{EI}{l^2} = 9,92 \frac{EI}{l^2}.$$

При ином распределении внешних узловых сил между стойками для определения $P_{\text{кр}}$ можно рекомендовать зависимость

$$P_{\text{кр}} = \frac{\Sigma P_{\text{кр}}}{k_1 + k_2}$$

где k_1 и k_2 —коэффициенты пропорциональности внешних сил для стоек. Например, при нагружении лишь одной стойки 1–3 внешней узловой силой ($k_1 = 1$; $k_2 = 0$) для той же схемы рамы (рис. 9.40, а) получаем

где ограничение справа соответствует местной форме потери устойчивости нагруженной стойки [8].

В примерах, изложенных выше, поиск критической силы $P_{кр}$ начинался с определения приближенных значений силы путем разложения заданных систем на простейшие звенья. Для каждого из звеньев определялось значение $P_{кр}$, а затем проводилось уточнение критической силы для системы в целом.

Пример 9.6

Определить наименьший параметр критической системы сил и расчетные длины сжатых элементов для рамы, изображенной на рис. 9.41, если $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3,6$; $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Цифрами 0, 1, ..., 6 обозначены узлы рамы.

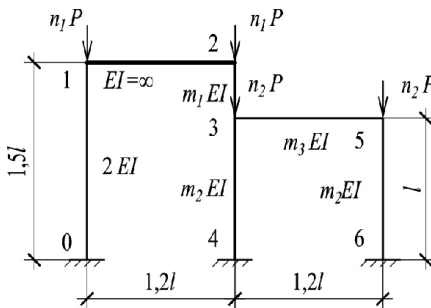


Рис. 9.41

Порядок расчета:

1. Продольные силы в стойках в докритическом состоянии определяем из условия равновесия стоек:

$$\begin{aligned} N_{10} &= N_{23} = P = N, \\ N_{34} &= P + 2P = 3P = 3N, \\ N_{56} &= 2P = 2N. \end{aligned}$$

2. Коэффициенты влияния продольных сил

$$v_{56} = l \sqrt{\frac{2N}{2EI}} = v;$$

$$v_{10} = l_{10} \cdot \sqrt{\frac{N_{10}}{EI_{10}}} = 1,5 l \sqrt{\frac{N}{2EI}} = 1,06 v, \text{ где } v = \sqrt{\frac{N}{EI}};$$

$$v_{23} = 0,5 l \cdot \sqrt{\frac{N}{EI}} = 0,5v, \quad v_{34} = l \cdot \sqrt{\frac{3N}{2EI}} = 1,22 v.$$

3. Выбор основной системы:

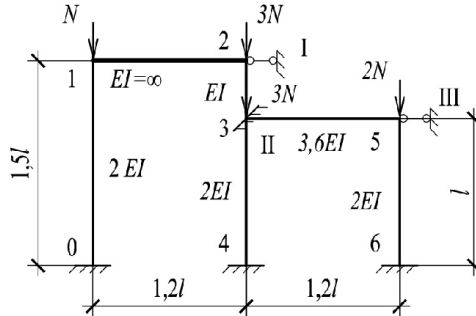


Рис. 9.42

Так как ригель 1-2 абсолютно жесткий, то при выборе основной системы вводить защемления в узлы 1, 2 не следует. Основная система метода перемещений изображена на рис. 9.42. Введенные связи обозначены цифрами I, II, III. Связи I, III представляют стерженьки, препятствующие линейному смещению узлов 2 и 5, а защемление II – повороту узла 3.

4. Уравнение устойчивости

Заданная расчетная схема рамы три раза неопределима по методу перемещений, поэтому уравнение устойчивости представляет собой определитель третьего порядка.

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Устанавливаем формулы для вычисления коэффициентов определителя.

а) Осуществляем линейное перемещение связи I вправо на $Z_1 = 1$. От этой процедуры возникают эпюры изгибающих моментов только в стойках 0-1 и 2-3. Эпюра M_1 приведена на рис. 9.43.

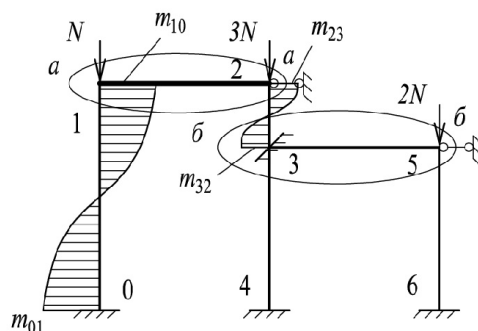


Рис. 9.43

Используем только те моменты и поперечные силы, которые входят в формулы коэффициентов определителя.

В формулы подставлены жесткости и длины соответствующих стержней.

$$m_{32} = 6 \frac{EI_{23}}{l_{23}^2} \varphi_4(v_{23}) = 6 \frac{EI}{(0,5l)^2} \varphi_4(0,5v) = 24 \varphi_4(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^2},$$

$$q_{10} = 12 \frac{EI_{10}}{l_{10}^3} \cdot \eta_2(v_{10}) = 12 \frac{2EI}{(1,5l)^3} \cdot \eta_2(1,06v) = 7,11 \eta_2(1,06v) \cdot \frac{EI}{l^3},$$

$$q_{32} = q_{23} = 12 \frac{EI_{23}}{l_{23}^3} \cdot \eta_2(v_{23}) = 12 \frac{EI}{(0,5l)^3} \cdot \eta_2(0,5v) = 96 \eta_2(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^3}.$$

Приведенные формулы взяты из строки 4 табл. 9.1.

По эпюре M_1 определены коэффициенты r_{11} ; r_{21} ; r_{31} из условия равновесия ригелей и узла 3 (рис. 9.44–9.46).

Сечение $a - a$

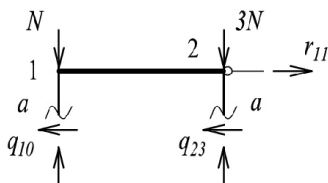


Рис. 9.44

$$r_{11} = q_{10} + q_{23} = [7,11 \eta_2(1,06v) + 96 \eta_2(0,5v)] \cdot \frac{EI}{l^3},$$

$$r_{21} = m_{32} = 24 \varphi_4(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^2}.$$



Рис. 9.45

Для определения r_{31} проводим сечение б-б:

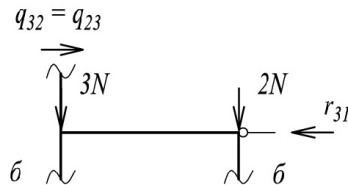


Рис. 9.46

Из уравнения $\sum X = 0$ получаем:

$$r_{31} = q_{32} = -96 \eta_2(0,5 \nu) \cdot \frac{EI}{l^3}.$$

б) Строим эпюру изгибающих моментов от поворота заземления II на угол $Z_2 = 1$. Эпюра M_2 приведена на рис. 9.47.

Моменты в стержнях определяем по табл. 9.1 (строка 3):

$$m_{32} = 4 \frac{EI_{32}}{l_{32}} \cdot \varphi_2(\nu_{23}) = 4 \frac{EI}{0,5l} \cdot \varphi_2(0,5\nu) = 8 \varphi_2(0,5\nu) \cdot \frac{EI}{l},$$

$$m_{35} = 3 \frac{EI_{35}}{l_{35}} = 3 \frac{3,6EI}{1,2l} = 9 \frac{EI}{l} \text{ — на ригеле (не сжатом стержне) эпюра } M$$

прямолинейна (формулы берем из таблицы 8.1 метода перемещений);

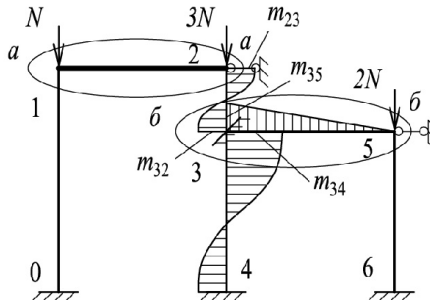


Рис. 9.47

$$m_{34} = 4 \frac{EI_{34}}{l_{34}} \cdot \varphi_2(v_{34}) = 4 \frac{2EI}{l} \cdot \varphi_2(1,22v) = 8 \varphi_2(1,22v) \cdot \frac{EI}{l} \text{ (табл. 9.1);}$$

$$q_{23} = q_{32} = 6 \frac{EI_{23}}{l_{23}^2} \cdot \eta_3(0,5v) = 6 \frac{2EI}{(0,5l)^2} \cdot \eta_3(0,5v) = 24 \eta_3(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^2},$$

$$q_{34} = 6 \frac{EI_{34}}{l_{34}^2} \cdot \eta_3(v_{34}) = 6 \frac{2EI}{l^2} \cdot \eta_3(1,22v) = 12 \eta_3(1,22v) \cdot \frac{EI}{l^2}.$$

Эпюры и формулы моментов поперечных сил взяты из строки 3 табл. 9.1.

По эпюре M_2 определяем коэффициенты r_{22} ; r_{12} ; r_{32} .

Аналогично пункту «5а» определяем r_{12} из равновесия ригеля 1-2 и r_{32} определяем из равновесия ригеля 3-5 рис.9.48, а, б:

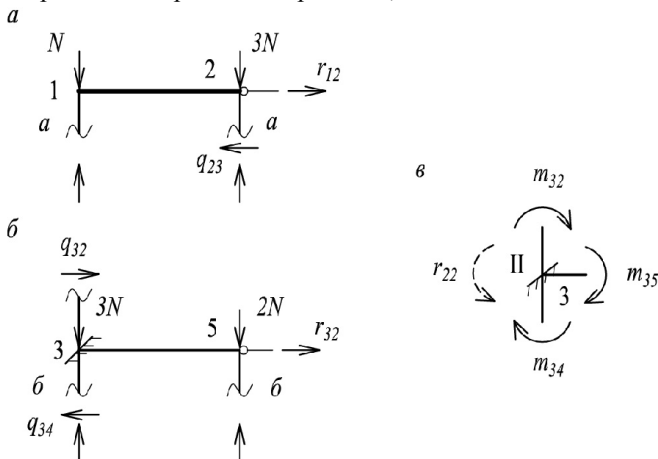


Рис. 9.48

Реактивные усилия определяются из выражений:

$$r_{12} = q_{23} = 24 \eta_3(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^2},$$

$$r_{32} = q_{34} - q_{32} = [12 \eta_3(1,22v) - 24 \eta_3(0,5v)] \cdot \frac{EI}{l^2}.$$

Реактивное защемление r_{22} определяется из равновесия узла 3 (рис.9.48, в), в котором содержится введенное защемление II.

$$r_{22} = m_{32} + m_{35} + m_{34} = [8\varphi_2(0,5v) + 9 + 8\varphi_2(1,22v)] \cdot \frac{EI}{l^2},$$

в) строим эпюру изгибающих моментов от смещения линейной связи III на $Z_3 = 1$. При этой операции переместятся узлы 5, 3 и изогнутся стойки 3-2, 3-4 и 5-6, в которых возникнут эпюры моментов. Эпюра M_3 приведена на рис. 9.49, а.

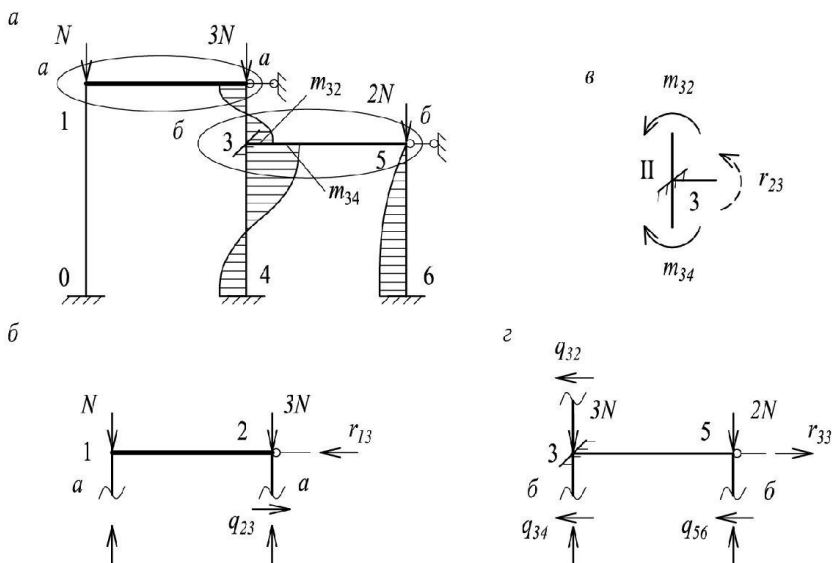


Рис. 9.49

Значение моментов по концам стержней определяем аналогично рассмотренному выше (табл. 9.1).

$$m_{32} = 6 \frac{EI_{32}}{l_{32}^2} \cdot \varphi_4(v_{32}) = 6 \frac{EI}{(0,5l)^2} \cdot \varphi_4(0,5v) = 24\varphi_4(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^2};$$

$$m_{34} = 6 \frac{EI_{34}}{l_{34}^2} \cdot \varphi_4(v_{34}) = 6 \frac{2EI}{l^2} \cdot \varphi_4(1,22v) = 12\varphi_4(1,22v) \cdot \frac{EI}{l^2};$$

$$q_{23} = q_{32} = 12 \frac{EI_{32}}{l_{32}^3} \cdot \eta_2(v_{32}) = 12 \frac{EI}{(0,5l)^3} \cdot \eta_2(0,5v) = 96\eta_2(0,5v) \cdot \frac{EI}{l^3};$$

$$q_{34} = 12 \frac{EI_{34}}{l_{34}^3} \cdot \eta_2(v_{34}) = 12 \frac{2EI}{l^3} \cdot \eta_2(1,22v) = 24\eta_2(1,22v) \cdot \frac{EI}{l^3}.$$

Перечисленные формулы взяты из таблицы 9.1

$$q_{56} = 3 \frac{EI_{56}}{l_{56}^3} \cdot \eta_1(v_{56}) = 3 \frac{2EI}{l^3} \cdot \eta_1(v) = 6\eta_1(v) \cdot \frac{EI}{l^3}. \text{ (строка 2 табл. 9.1).}$$

Из условий равновесия ригелей и узла 3 по эпюре M_3 находим коэффициенты r_{13} ; r_{23} ; r_{33} .

r_{13} определяем из равновесия ригеля 1-2.

$r_{13} = q_{23} = -96 \eta_2 \cdot (0,5v) \cdot \frac{EI}{l^3}$ (усилие r_{13} взято со знаком «минус», так как его направление не совпадает с направлением r_{11}).

r_{23} – из равновесия узла 3.

$$r_{23} = m_{34} - m_{32} = [12\varphi_4(1,22v) - 24\varphi_4(0,5v)] \cdot \frac{EI}{l^2}.$$

r_{33} определяем из равновесия ригеля 3-5 (рис.9.48,г).

$$r_{33} = q_{32} + q_{34} + q_{56} = [96\eta_2(0,5 v) + 24\eta_2(1,22 v) + 6\eta_1(v)] \cdot \frac{EI}{l^3}.$$

При определении коэффициентов необходимо проверять их взаимность, т. е. должны быть соблюдены равенства: $r_{12} = r_{21}$; $r_{13} = r_{31}$; $r_{23} = r_{32}$.

6. Численное раскрытие определителя.

Для отыскания v_{\min} , при котором уравнение устойчивости удовлетворяется, последовательно задаемся величинами v , при каждом значении находим элементы определителя численно и раскрываем определитель.

Покажем вычисление элементов определителя при $v = 2,0$, тогда $1,22 v = 1,22 \cdot 2 = 2,44$; $0,5 v = 0,5 \cdot 2 = 1,0$; $1,06 v = 1,06 \cdot 2 = 2,12$.

Множители $\frac{EI}{l}$; $\frac{EI}{l^2}$ и т. д. опускаем.

$$r_{11} = 7,11 \eta_2(1,06 v) + 96 \eta_2(0,5 v) = 7,11 \cdot 0,5480 + 96 \cdot 0,8999 = 90,3;$$

$$r_{12} = r_{21} = 24 \varphi_4(0,5 v) = 24 \cdot 0,9832 = 23,6;$$

$$r_{13} = r_{31} = -96 \eta_2(0,5 v) = -96 \cdot 0,8999 = -86,4;$$

$$r_{22} = 8 \varphi_2(0,5 v) + 9 + 8 \varphi_2(1,22 v) = 8 \cdot 0,9662 + 9 + 8 \cdot 0,7838 = 23,0;$$

$$r_{23} = r_{32} = 12 \eta_3(1,22 v) - 24 \eta_3(0,5 v) = 12 \cdot 0,8963 - 24 \cdot 0,9832 = -12,8;$$

$$r_{33} = 96 \eta_2(0,5 v) + 24 \eta_2(1,22 v) + 6 \eta_1(v) = 96 \cdot 0,8999 + 24 \cdot 0,4002 + 6 \cdot (-0,6372) = 92,22.$$

Функции φ_2 , φ_4 , η_2 , η_3 и другие взяты из таблицы 9.2 для соответствующих значений v . Например, $\eta_2 = 0,4002$ при $v = 2 \cdot 1,22 = 2,44$. В случае отсутствия значений данной функции при конкретном v , необходимо произвести интерполяцию.

Результаты вычисления определителя $D(v)$ при различных значениях v приведены в табл. 9.3, причем общий множитель $10 \frac{EI}{l^3}$ опущен.

Функции, необходимые для вычисления коэффициентов определителя, также приведены в табл. 9.2. По результатам вычисления определителя при различных v составлен график зависимости $D(v)$ от v .

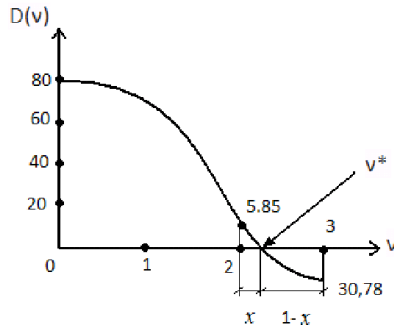


Рис. 9.50

После смены знака определителя можно сделать прямолинейную интерполяцию:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{5,85}{30,78}, \quad 5,85 - 5,85x = 30,78x.$$

$$36,63x = 5,85; \quad x = 0,14.$$

С учетом этого $v_{кр} = 2 + 0,14 = 2,14$.

В табл. 9.3 вычислен определитель $D(v)$ при $v = 2,14$. Его величина близка к нулю.

С учетом установленного $v_{кр} = 2,14$ вычисляем значение критической силы:

$$P_{кр} = v^2 \cdot \frac{EI}{l^2} = 2,14^2 \cdot \frac{EI}{l^2} = 4,6 \frac{EI}{l^2}.$$

Расчетные длины стержней

Расчет ведем по формуле:

$$l_0 = \mu \cdot l, \text{ где } \mu = \frac{\pi}{v}.$$

$$l_0^{10} = \frac{\pi}{v_{10}} \cdot l = \frac{\pi}{1,06v} \cdot 1,5l = \frac{3,14 \cdot 1,5l}{1,0 \cdot 2,14} = 2,08 l;$$

$$l_0^{23} = \frac{\pi}{v_{23}} \cdot l_{23} = \frac{\pi}{0,5v} \cdot 1,5l = \frac{3,14 \cdot 0,5l}{5,0 \cdot 2,14} = 1,47 l;$$

$$l_0^{34} = \frac{\pi}{v_{34}} \cdot l_{34} = \frac{\pi}{1,22v} \cdot l = \frac{3,14}{1,22 \cdot 2,14} \cdot l = 1,20 l;$$

$$l_0^{56} = \frac{\pi}{v_{56}} \cdot l_{56} = \frac{\pi}{v} \cdot l = \frac{3,14}{2,14} \cdot l = 1,47 l.$$

Расчетные длины стрижней необходимы при подборе сечений стрижней из условия устойчивости.

Таблица 9.3

ν	$\varphi_2(0,5\nu)$	$\varphi_2(1,22\nu)$	$\varphi_1(0,5\nu)$	$\varphi_1(1,22\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(0,5\nu)$	$\eta_2(1,06\nu)$	$\eta_2(1,22\nu)$	$D(\nu)$
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	$\begin{vmatrix} 10,31 & 2,4 & -9,6 \\ 2,4 & 2,5 & -1,2 \\ -9,5 & -1,2 & 12,6 \end{vmatrix} = 76,57$
1	0,9913	0,9495	0,9950	0,9748	0,5980	0,9740	0,8875	0,8509	$\begin{vmatrix} 9,98 & 2,34 & -9,35 \\ 2,34 & 2,45 & -1,22 \\ -9,35 & -1,22 & 1,75 \end{vmatrix} = 47,31$
2	0,9662	0,7838	0,9832	0,8963	-0,6372	0,8999	0,5480	0,4002	$\begin{vmatrix} 9,03 & 2,36 & -8,64 \\ 2,36 & 2,80 & -1,28 \\ -8,64 & -1,28 & 9,22 \end{vmatrix} = 5,85$
3	0,9226	0,4425	0,9619	0,7520	-2,8639	0,7743	-0,0249	-0,3643	$\begin{vmatrix} 7,41 & 2,31 & -7,43 \\ 2,31 & 1,99 & -1,40 \\ -7,43 & -1,40 & 4,64 \end{vmatrix} = -30,76$
2,14	0,9613	0,7492	0,7808	0,8805	-0,8822	0,8853	0,4614	0,3128	$\begin{vmatrix} 8,64 & 2,35 & -8,50 \\ 2,35 & 2,27 & -1,30 \\ -8,50 & -1,30 & 8,72 \end{vmatrix} = 226,92 - 227,10 = -0,18$

Пример 9.7

Наметить ход расчета заданной рамы на устойчивость (рис. 9.51).

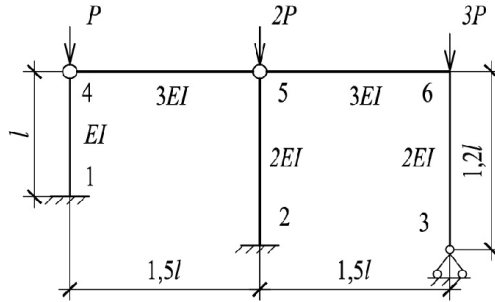


Рис. 9.51

Решение:

1. Продольные силы, возникающие в стойках в докритическом состоянии:

$$N_{41} = P; N_{52} = 2P; N_{63} = 3P.$$

2. Коэффициенты влияния продольных сил сжатых элементов (стоек):

$$v_{41} = l_{41} \sqrt{\frac{N_{41}}{EI_{41}}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = v;$$

$$v_{52} = l_{52} \sqrt{\frac{N_{52}}{EI_{52}}} = 1,2l \sqrt{\frac{2P}{2EI}} = 1,2v;$$

$$v_{63} = l_{63} \sqrt{\frac{N_{63}}{EI_{63}}} = 1,2l \sqrt{\frac{3P}{2EI}} = 1,47v,$$

т. е. все коэффициенты выразили через единый параметр v .

3. Выбор ОСМП (рис. 9.52):

$$K = K_I + K_2 = 1 + 1 = 2.$$

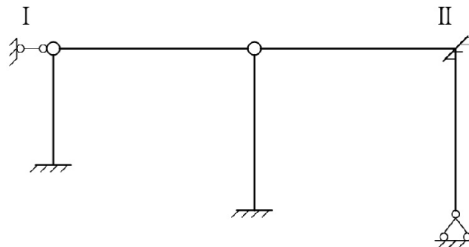


Рис. 9.52

ОСМП при расчете на устойчивость такая же, как и при расчете на прочность.

В этом примере ОСМП получена введением линейной связи I и защемления II (рис. 9.52).

Примечание: иногда при расчете на устойчивость в рамах встречаются абсолютно жесткие ригели (рис. 9.53, а). В этом случае при выборе ОСМП вводить защемления в узлы 4,5,6 не следует, но при построении эпюры M узлы считаются жесткими, стойки считаются стержнями с двумя защемленными концами. От линейного смещения I связи эпюра M построена по строке 4 табл. 9.1.

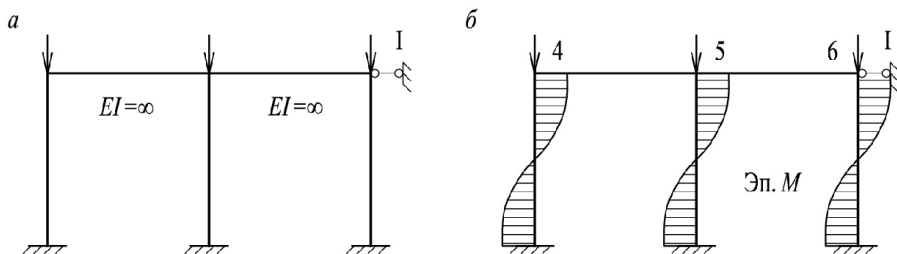


Рис. 9.53

4. Уравнение устойчивости при $K=2$ представляет собой определитель второго порядка:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Построением эпюр M_1 и M_2 получаем формулы для вычисления коэффициентов определителя

$$r_{11}; r_{12} = r_{21}; r_{22} \text{ (рис. 9.52).}$$

а) Эпюра M_1 от перемещения линейной связи I вправо изображена на рис. 9.54, а; эпюры возникают только в стойках:

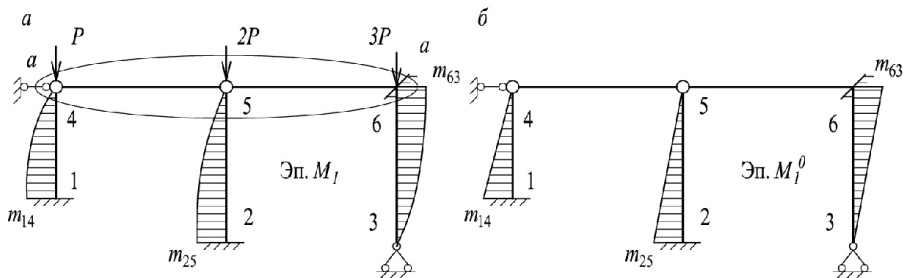


Рис. 9.54

Чтобы подчеркнуть аналогию с обычным МП, на рис. 9.54, б приведена эпюра M_1^0 при расчете на прочность. По эпюре M_1 определяем коэффициенты r_{11} и r_{21} , для этого вырезаем ригель (рис. 9.55).

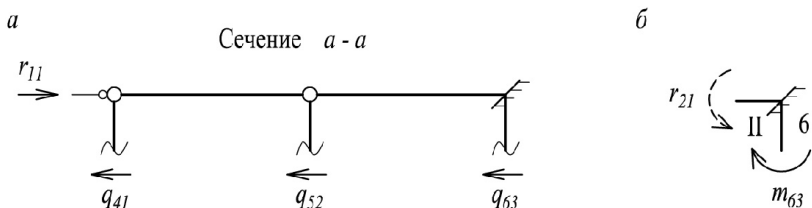


Рис. 9.55

Из условия равновесия $\sum X = 0$ находим $r_{11} = q_{41} + q_{52} + q_{63}$; поперечные силы определены с помощью функций табл. 9.1:

$$q_{41} = 3 \frac{EI}{l^3} \eta_1(v) \text{ (строка 2, табл. 9.1).}$$

Подставляем жесткости и длины стоек:

$$q_{41} = 3 \frac{EI}{l^3} \eta_1(v);$$

$$q_{52} = 3 \frac{EI_{52}}{l_{52}^3} \eta_1(v_{52}) = 3 \frac{2EI}{(1,2l)^3} \eta_1(1,2v) = 3,47 \frac{EI}{l^3} \eta_1(1,2v);$$

$$q_{63} = 3 \frac{2EI}{(1,2l)^3} \eta_1(v_{63}) = 3,47 \frac{EI}{l^3} \eta_1(1,47v).$$

$$r_{11} = q_{41} + q_{52} + q_{63} = \frac{EI}{l^3} [3\eta_1(v) + 3,47\eta_1(1,2v) + 3,47\eta_1(1,47v)];$$

r_{21} получаем из равновесия узла 6 (рис.9.55, б):

$$r_{21} = m_{63} = 3 \frac{EI_{63}}{l_{63}^2} \varphi_1(v_{63}).$$

Формула для момента m_{63} взята из строки 2 (табл. 9.1):

$$r_{21} = m_{63} = 3 \frac{2EI}{(1,2l)^2} \varphi_1(1,47v) = 4,17 \frac{EI}{l^2} \varphi_1(1,47v).$$

б) Эпюра M_2 от поворота введенного защемления изображена на рис. 9.56, а; для сравнения с расчетом на прочность на рис. 9.56, б приведена эпюра M_2^0 .

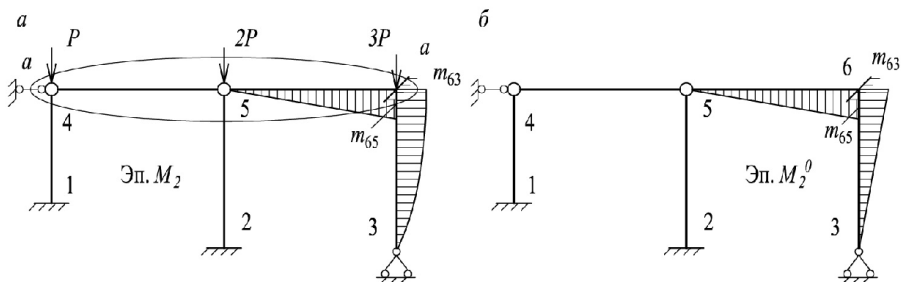


Рис. 9.56

Следует подчеркнуть, что в несжатых элементах (ригель 5-6) эпюры определяются по обычным формулам МП (табл. 8.1).

$m_{63} = 3 \frac{EI}{l} \varphi_1(v)$ – формула из строки 1 табл. 9.1. С учетом жесткости и длины стержня 6-3 имеем:

$$m_{63} = 3 \frac{2EI}{1,2l} \varphi_1(1,47v) = 5,0 \frac{EI}{l} \varphi_1(1,47v);$$

$$m_{65} = 3 \frac{EI_{65}}{l_{65}} = 3 \frac{3EI}{1,5l} = 6 \frac{EI}{l}.$$

Как обычно, по эпюре M_2 определяем коэффициенты r_{12} и r_{22} (рис. 9.57, а, б).

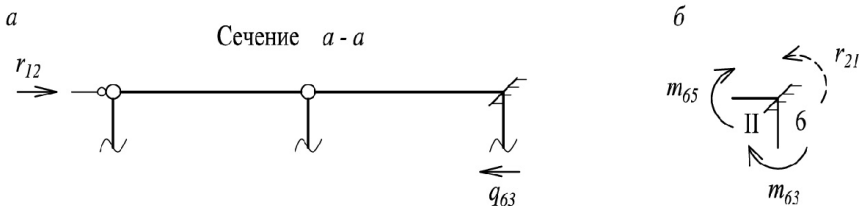


Рис. 9.57

$$r_{12} = q_{63}; \quad q_{63} = 3 \frac{EI}{l^2} \varphi_1(v) \text{ – формула-строка 1 табл.9.1.}$$

$$q_{63} = 3 \frac{2EI}{(1,2l)^2} \varphi_1(1,47v) = 4,17 \frac{EI}{l^2} \varphi_1(1,47v);$$

следует проверить равенство $r_{12} = r_{21}$.

Из равновесия узла 6 (рис. 9.57, б) имеем:

$$r_{22} = m_{65} + m_{63} = \frac{EI}{l} [6 + 5 \varphi_1(1,47v)].$$

После получения формул элементов определителя раскрываем его численно, принимая $v = 0$, $v = 1$ и т. д.

6. Выписываем из таблицы специальных функций необходимые для данной рамы численные значения функций (в каждой раме свои функции). Для заданной рамы они приведены в табл. 9.4

Таблица 9.4

v	$\varphi_1(1,47v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_1(1,2v)$	$\eta_1(1,47v)$	D
0	1,00	1,00	1,00	1,00	107,3511
1,0	0,8459	0,5980	0,4198	0,1249	25,2439
2,0	0,1873	-0,6372	-1,3896	-2,6939	

Все коэффициенты определяем численно и подставляем в уравнение:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - (r_{12})^2 = 0.$$

Например, при $\nu = 1$ для стойки 2-5 имеем конкретные $\nu = 1,2$; для стойки 6-3: $\nu = 1,47 \cdot 1 = 1,47$.

Для этих значений ν выписаны величины функций. Для промежуточных значений ν функции получаем интерполяцией.

$$r_{11} = 3\eta_1(\nu) + 3,47\eta_1(1,2\nu) + 3,47\eta_1(1,47\nu) = \\ = 3 \cdot 0,5980 + 3,47 \cdot 0,4198 + 3,47 \cdot 0,1249 = 3,6841,$$

множитель $\frac{EI}{l^3}$ опущен.

$$r_{12} = r_{21} = 4,17\varphi_1(1,47) = 4,17 \cdot 0,8459 = 3,5274;$$

$$r_{22} = 6 + 5,0\varphi_1(1,47) = 6 + 5 \cdot 0,8459 = 10,2295;$$

$$D(\nu) = 3,6841 \cdot 10,2295 - (3,5274)^2 = 37,6865 - 12,4425 = 25,2439.$$

Если определитель получился больше 0, то для следующего приближения необходимо значение ν увеличить; если меньше 0, то необходимо ν уменьшить – определитель $D(\nu)$, в зависимости от ν , меняется по определенному закону (рис. 9.58).

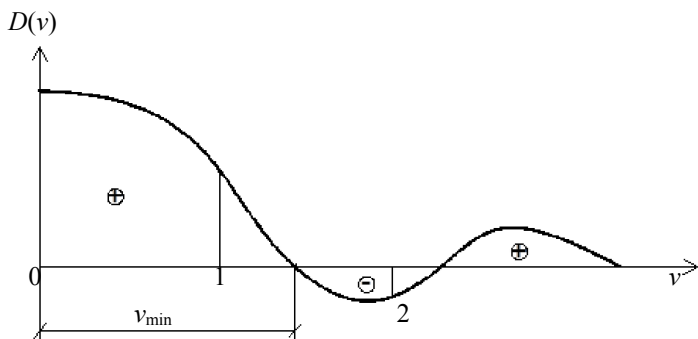


Рис. 9.58

В данном примере при $\nu = 1$ определитель $D(\nu) > 0$; для следующего приближения принимаем $\nu = 2,0$, тогда коэффициенты влияния продольных сил других стоек принимают значения:

$$\nu_{52} = 1,2\nu = 1,2 \cdot 2 = 2,4, \quad \nu_{63} = 1,47\nu = 1,47 \cdot 2 = 2,94.$$

В рассматриваемом примере при принятом $\nu = 2,0$ главный коэффициент r_{11} получился отрицательным, что недопустимо:

$$r_{11} = 3(-0,6372) + 3,47(-1,3896) + 3,47(-2,6939) = -16,0813.$$

Поэтому необходимо уменьшить шаг и для следующего приближения принять $\nu = 1,5$.

При смене знака определителя можно сделать интерполяцию для нахождения ν_{\min} , хотя зависимость между определителем $D(\nu)$ и параметром ν

не является прямолинейной. В приведенном примере показана лишь технология расчета на устойчивость.

Пример 9.8

Раму, изображенную на рис. 9.59, а, рассчитать на устойчивость (определить $P_{кр}$).

Заданная рама содержит типовые стержни, не имеющие аналогов при расчете на прочность. Основная система метода перемещений (ОСМП) показана на рис. 9.59, б.

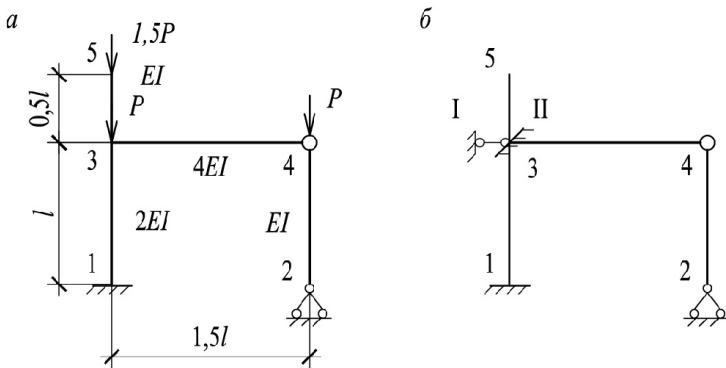


Рис. 9.59

Порядок расчета:

1. Определяем продольные сжимающие силы в стойках, используя метод РОЗУ (метод сечений):

$$N_{53} = 1.5P, \quad N_{31} = 1.5P + P = 2.5P, \quad N_{42} = P.$$

2. Коэффициенты влияния продольных сил для сжатых стоек:

$$\begin{aligned} v_{42} &= l_{42} \sqrt{\frac{N_{42}}{EI_{42}}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = v; \\ v_{53} &= l_{53} \sqrt{\frac{N_{53}}{EI_{53}}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{1.5P}{EI}} = 0.61v; \\ v_{31} &= l_{31} \sqrt{\frac{N_{31}}{EI_{31}}} = l \sqrt{\frac{2.5P}{2EI}} = 1.12v. \end{aligned}$$

3. Образует основную систему метода перемещений, учитывая степень кинематической неопределимости (рис. 9.59, б):

$$K = K_1 + K_2 = 1 + 1 = 2.$$

В соответствии с $K = 2$ необходимо ввести две дополнительные связи, защемление II в жесткий узел 3 и линейную связь I на уровне ригеля.

4. Уравнение устойчивости:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) \end{vmatrix} = 0.$$

5. Формулы для вычисления коэффициентов определителя $r_{ik}(v)$ получены построением эпюр M_I и M_2 (рис. 9.60, 9.61).

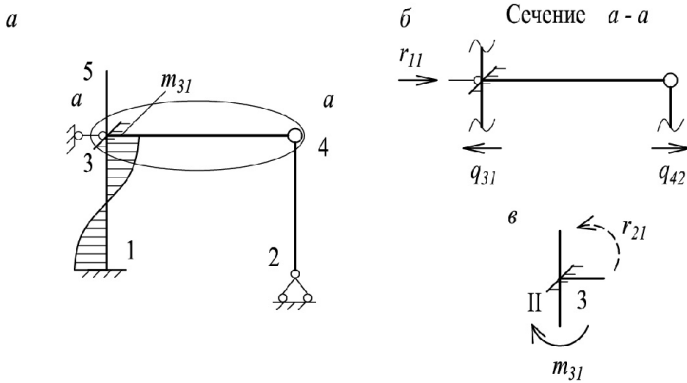


Рис. 9.60

а) Построение эпюры M_I от линейного смещения связи I вправо.

Здесь значения моментов m_{13} и m_{31} определены по табл. 9.1.

В этом примере имеется отличие от расчета на прочность. При расчете на прочность в стержне с двумя шарнирными концами 4-2 поперечная сила q_{42} равнялась бы 0. При расчете на устойчивость q_{42} определяем по строке 8 табл. 9.1:

$$q_{42} = \frac{EI_{42}}{l_{42}^3} v_{42}^2 = \frac{EI}{l^3} v^2.$$

Следует обратить внимание на то, что в табл. 9.1 (строка 8) указано направление реакции q_{ik} влево, а при рассмотрении сечения $a-a$ вектор q_{42} приобретает смысл внутреннего усилия, и поэтому его вектор направлен в противоположную сторону.

$$q_{31} = 12 \frac{EI_{31}}{l_{31}^3} \eta_2(v_{31}) \text{ (строка 4, табл. 9.1).}$$

После подстановки своих значений длины и жесткости стержня имеем:

$$q_{31} = 12 \frac{2EI}{l^3} \eta_2(1,12v) = 24 \frac{EI}{l^3} \eta_2(1,12v).$$

Из условия равновесия ригеля (рис. 9.60, б) следует:

$$r_{11} = q_{31} - q_{42} = \frac{EI}{l^3} [24\eta_2(1,12v) - v^2].$$

Коэффициент $r_{21} = m_{31}$, находим из равновесия узла 3 (рис. 9.60, в), где $m_{31} = 6 \frac{EI_{31}}{l_{31}^2} \varphi_4(v_{31}) = 6 \frac{2EI}{l^2} \varphi_4(1,12v) = 12 \frac{EI}{l^2} \varphi_4(1,12v).$

б) Эпюра M_2 от поворота введенного защемления II на $Z_{II} = l$ изображена на рис. 9.61, а.

В отличие от расчета на прочность в этом примере в консоли 3-5 возникает момент $m_{35} = \frac{EI}{l} \nu \operatorname{tg} \nu$ (строка 7, табл. 9.1).

После подстановки характеристик стержня 3-5 получаем:

$$m_{35} = \frac{EI}{l/2} (0,61) \operatorname{tg} 0,61 = 2 \frac{EI}{l} 0,61 \cdot \operatorname{tg} 0,61.$$

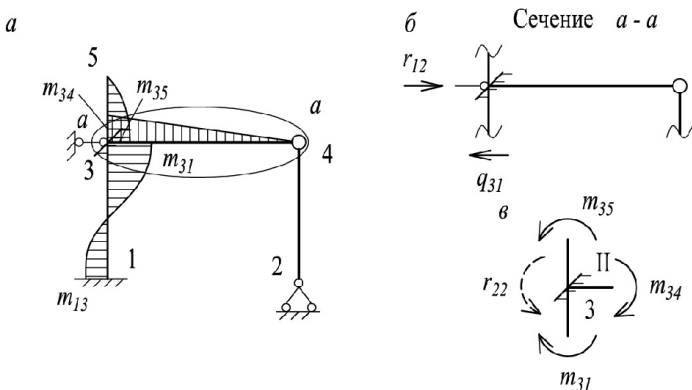


Рис. 9.61

При расчете на прочность $m_{35} = 0$. Моменты m_{31} и q_{31} в стойке 3-1 определяем по строке 3 табл. 9.1:

$$m_{31} = 4 \frac{EI_{31}}{l_{31}} \varphi_2(\nu_{31}) = 4 \frac{2EI}{l} \varphi_2(1,12\nu) = 8 \frac{EI}{l} \varphi_2(1,12\nu);$$

$$q_{31} = 6 \frac{EI_{31}}{l_{31}^2} \eta_3(\nu_{31}) = 6 \frac{2EI}{l^2} \eta_3(1,12\nu) = 12 \frac{EI}{l^2} \eta_3(1,12\nu);$$

$$r_{12} = q_{31} = 12 \frac{EI}{l^2} \eta_3(1,12\nu) \text{ (рис. 9.61, б).}$$

Необходима проверка равенства $r_{12} = r_{21}$, с учетом $\eta_3(\nu) = \varphi_4(\nu)$ равенство выполняется.

Чтобы подчеркнуть разницу между эпюрами M_2 при расчете на устойчивость (рис. 9.61, а) и расчетом на прочность, приведена эпюра M_2^0 (рис. 9.62) для расчета на прочность.

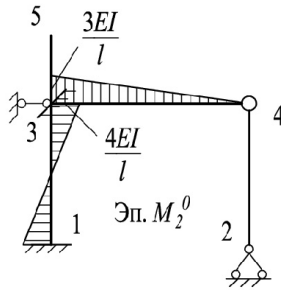


Рис. 9.62

Момент в несжатом ригеле 3-4 определяется так же, как при расчете на прочность (эпюра прямолинейна):

$$m_{34} = 3 \frac{EI_{34}}{l_{34}} = 3 \frac{4EI}{1,5l} = 8 \frac{EI}{l}.$$

С учетом моментов (рис. 9.61, е):

$$r_{22} = m_{31} + m_{34} + m_{35} = \frac{EI}{l} [8 \varphi_2(1,12\nu) + 8 - 2 \cdot 0,61\nu \operatorname{tg} 0,61\nu].$$

6. После получения формул коэффициентов определителя, приступаем к численному раскрытию определителя $D(\nu)$. Для этого выписываем численные значения всех необходимых функций для данной рамы, они приведены в табл. 9.5.

Таблица 9.5

ν	$\eta_2(1,12 \nu)$	$\varphi_2(1,12 \nu)$	$0,61 \nu \operatorname{tg} 0,61 \nu$	$\varphi_4 = \eta_3 = (1,12 \nu)$	$D(\nu)$
0,0	0,9840	1,0000	0,0000	1,0000	233,856
1,0	0,8743	0,9574	0,4311	0,9790	157,6759
2,0	0,4951	0,8204	3,4058	0,9132	-58,8013
1,75	0,6138	0,8648	1,9800	0,9341	2,224

Покажем раскрытие определителя $D(\nu)$ при $\nu = 1$, для этого каждый коэффициент вычислим отдельно по приведенным формулам, множитель $\frac{EI}{l_i}$ опускаем:

$$r_{11} = 24\eta_2(1,12\nu) - \nu^2 = 24 \cdot 0,8743 - 1^2 = 19,9832;$$

$$r_{22} = 8 + 8\varphi_2(1,12\nu) - 2 \cdot 0,61\nu \operatorname{tg} 0,61\nu = 8 + 8 \cdot 0,9574 - 2 \cdot 0,4311 = 14,7970;$$

$$r_{12} = r_{21} = 12\eta_3(1,12\nu) = 12 \cdot 0,9790 = 11,7480;$$

$$D(\nu) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - (r_{12})^2;$$

$$D(\nu) = 19,9832 \cdot 14,7970 - 11,7480^2 = 157,6759.$$

Определитель получился положительный, поэтому для следующего приближения:

а) значение v увеличиваем, т. к. не дошли до v_{\min} ;

б) если $D(v) < 0$, то значение v уменьшаем, т. к. v_{\min} пройден (рис. 9.63).

В данном примере при $v = 1$ определитель $D(v) > 0$, поэтому для следующего приближения принимаем $v = 2$, тогда коэффициенты влияния для других стоек принимают значения $1,12v = 1,12 \cdot 2 = 2,24$; $0,61v = 0,61 \cdot 2 = 1,22$, при этих конкретных значениях выписываем необходимые функции и по тем же формулам вычисляем коэффициенты:

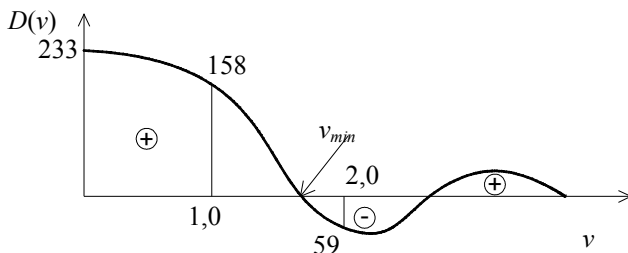


Рис. 9.63

$$r_{11} = 24\eta_2(1,12v) - v^2 = 24 \cdot 0,4951 - 2^2 = 7,8824;$$

$$r_{22} = 8 + 8\varphi_2(1,12v) - 2 \cdot 0,61v \operatorname{tg} 0,61v = 8 + 8 \cdot 0,8204 - 2 \cdot 3,4058 = 7,7516;$$

$$r_{12} = r_{21} = 12\eta_3(1,12v) = 12 \cdot 0,9132 = 10,9584;$$

$$D(v) = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 7,8824 \cdot 7,7516 - 10,9584^2 = 61,1012 - 120,0865 = -58,9853.$$

Теперь можно уточнить критический параметр путем линейной интерполяции, приняв закон изменения $D(v)$ прямолинейным в данном интервале (рис. 9.64); $v_2 = 2$, $v_1 = 1$, $\Delta v = 2 - 1 = 1$.

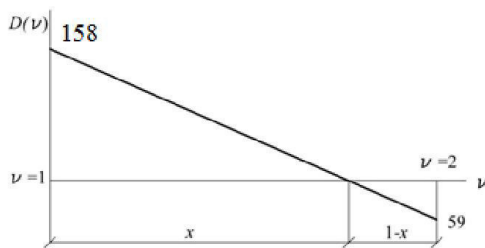


Рис. 9.64

$$\frac{158}{59} = \frac{x}{1-x}, \text{ откуда } x = 0,73, \text{ тогда } v = 1 + x = 1,73.$$

Но в данном случае разница между $D(1)$ и $D(2)$ значительная, и интерполяция получается довольно грубой. Поэтому был уменьшен шаг и раскрыт определитель при $\nu = 1,75$; $1,12\nu = 1,12 \cdot 1,75 = 1,96$;

$$0,61\nu = 0,61 \cdot 1,75 = 1,0675.$$

$$D(1,75) = 127,8700 - 125,6460 = 2,224.$$

Погрешность $\frac{2,24}{\frac{127,8700+125,6460}{2}} \cdot 100 \% = 1,75 \%$ – точность достаточна.

Окончательно принимаем $\nu_{кр} = 1,75$.

Тогда для рамы в целом имеем:

$$P_{кр} = \nu_{кр}^2 \frac{EI}{l^2} = 3,06 \frac{EI}{l^2}.$$

И в том числе для каждой стойки:

для стойки 3-5

$$1,5 P_{кр} = \frac{(0,61 \cdot 1,75)^2 EI}{(0,5l)^2} = 4,558 \frac{EI}{l^2}, \quad P_{кр} = 3,04 \frac{EI}{l^2};$$

для стойки 1-3:

$$2,5 P_{кр} = \frac{(1,12 \cdot 1,75)^2 \cdot 2EI}{l^2}, \quad P_{кр} = 3,07 \frac{EI}{l^2}.$$

Разница $P_{кр}$ в стойках весьма незначительна.

6. Определение расчетных длин стержней по формуле $l_0 = \mu l$, где $\mu = \frac{\pi}{\nu}$:

$$l_{0(13)} = \frac{\pi}{\nu_{13}} \cdot l_{13} = \frac{\pi}{1,96} \cdot l = 1,60l;$$

$$l_{0(35)} = \frac{\pi}{\nu_{35}} l_{35} = \frac{\pi}{1,0675} \cdot \frac{l}{2} = 1,47l;$$

$$l_{0(24)} = \frac{\pi}{\nu_{24}} l_{24} = \frac{\pi}{1,75} \cdot l = 1,8l.$$

Коэффициенты μ нужны для определения гибкости стержней $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ и выбора коэффициента φ , т. к. в таблице φ является функцией материала и гибкости λ . Коэффициент φ необходим при подборе сечений из условия устойчивости:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R,$$

где R – расчетное сопротивление (МПа).

Пример 9.9

Для рамы (рис. 9.65) наметить ход расчета на устойчивость.

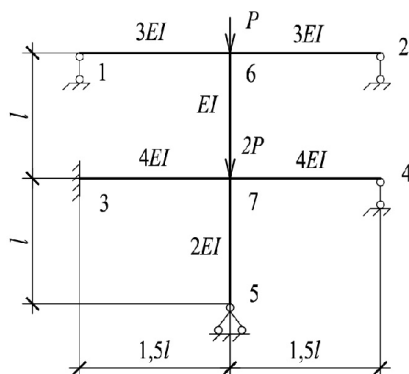


Рис. 9.65

В приведенном примере использован «эффект ползуна», который можно применять для узкого круга задач. Этот метод уже был показан в расчете рамы на прочность для уменьшения количества неизвестных (гл. 8, пример 8.13).

Порядок расчета:

1. Определяем продольные силы в стойках:

$$N_{67} = P; \quad N_{75} = P + 2 \cdot P = 3P.$$

2. Коэффициенты влияния продольных сил в сжатых стойках:

$$\nu_{67} = l_{67} \sqrt{\frac{N_{67}}{EI_{67}}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = \nu,$$

$$\nu_{75} = l_{75} \sqrt{\frac{N_{75}}{EI_{75}}} = l \sqrt{\frac{3P}{2EI}} = 1,22l \sqrt{\frac{P}{EI}} = 1,22\nu.$$

3. Образует основную систему метода перемещений. Устанавливаем степень кинематической неопределимости:

$$K = K_1 + K_2;$$

$$K_1 = 2 \text{ (два жестких узла 6, 7);}$$

$$K_2 = 2U - C = 2 \cdot 7 - 13 = 1.$$

Напоминаем, что K_2 определяется после превращения рамы в шарнирно-стержневую систему, так же, как в методе перемещений (МП).

Обычная основная система МП показана на рис. 9.66, а и получена введением двух защемлений и одной линейной связи, при этой ОСМП уравнение устойчивости представляет собой определитель третьего порядка:

$$D(\nu) = \begin{vmatrix} r_{11}(\nu) & r_{12}(\nu) & r_{13}(\nu) \\ r_{21}(\nu) & r_{22}(\nu) & r_{23}(\nu) \\ r_{31}(\nu) & r_{32}(\nu) & r_{33}(\nu) \end{vmatrix} = 0.$$

Решение по определению критической силы для рассматриваемой рамы можно существенно упростить, если учесть, что верхние ригели 1-6 и 6-2 имеют линейную подвижность по горизонтали благодаря шарнирно-подвижным опорам 1 и 2 и поэтому могут играть роль ползуна для стойки 6-7 (рис. 9.66, *б*).

С учетом этого принимаем ОСМП, изображенную на рис. 9.66, *б*. Принятая ОСМП получена введением защемлений I и II, а линейная связь в этой системе отсутствует.

3. При принятой ОСМП уравнением устойчивости будет определитель второго порядка:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) \end{vmatrix} = 0.$$

а

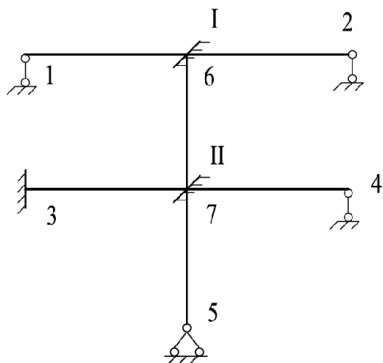
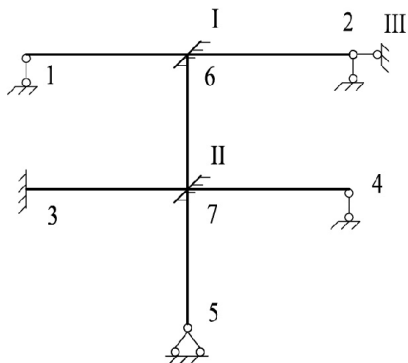


Рис. 9.66

4. Для вычисления коэффициентов определителя строим эпюры M_1 и M_2 от единичных угловых поворотов, введенных защемлений I и II (рис. 9.67, *а*, *б*).

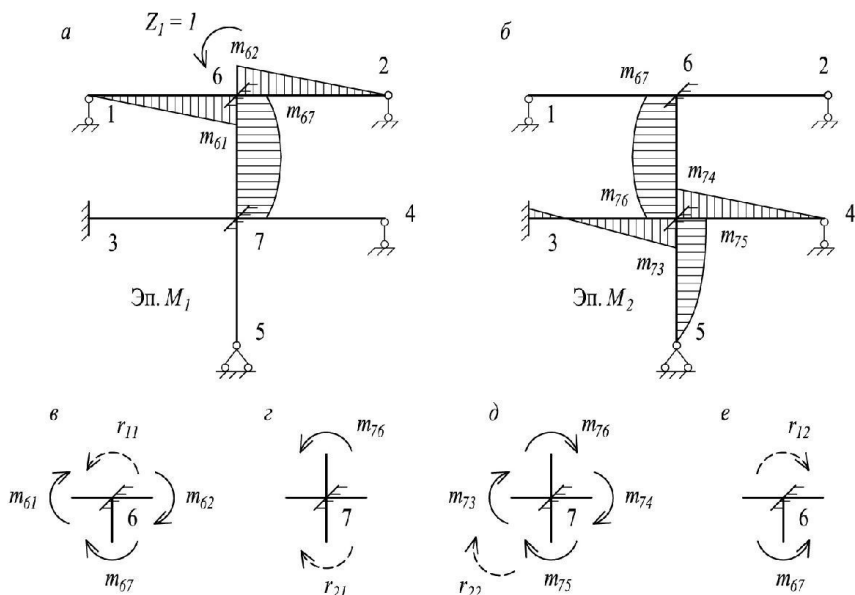


Рис. 9.67

При повороте защемления I на угол $Z_l = l$ имеем:

$$m_{61} = 3 \frac{EI_{61}}{l_{61}} = 3 \frac{3EI}{1,5l} = 6 \frac{EI}{l}; \quad m_{62} = m_{61} = 6 \frac{EI}{l};$$

$$m_{67} = \frac{EI_{67}}{l_{67}} \frac{v_{67}}{\operatorname{tg} v_{67}} \quad (\text{табл. 9.1, строка 5, для стержня с ползуном});$$

$$m_{67} = \frac{EI}{l} \frac{v}{\operatorname{tg} v},$$

на неповорачиваемом конце имеем

$$m_{76} = \frac{EI}{l} \frac{v}{\sin v};$$

$$r_{11} = \frac{EI}{l} \left(6 + 6 + \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right) = \frac{EI}{l} \left(12 + \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right);$$

из узла 7 в защемлении II имеем:

$$r_{21} = m_{76} = -\frac{EI}{l} \frac{v}{\sin v} \quad (\text{рис. 9.67, з}).$$

Для построения эпюры M_2 моменты по концам стержней определяем по формулам из табл. 9.1, 8.1:

$$m_{74} = 3 \frac{EI_{74}}{l_{74}} = 3 \frac{4EI}{1,5l} = \frac{8EI}{l};$$

$$m_{73} = 4 \frac{EI_{73}}{l_{73}} = 4 \frac{4EI}{1,5l} = 10,67 \frac{EI}{l};$$

$$m_{76} = \frac{EI}{l} \frac{v}{\operatorname{tg} v} \quad - \text{формула табл. 9.1, строка 5, жесткость стержня } EI, \text{ длина } l.$$

На неповорачиваемом конце:

$$m_{67} = \frac{EI}{l} \frac{v}{\sin v};$$

$$m_{75} = 3 \frac{EI}{l} \varphi_1(v) \text{ (табл. 9.1, строка 1);}$$

$$m_{75} = 3 \frac{2EI}{l} \varphi_1(1,22v) = \frac{6EI}{l} \varphi_1(1,22v).$$

Из равновесия узла 7 определяем r_{22} (рис. 9.67, ∂):

$$\begin{aligned} r_{22} = m_{76} + m_{74} + m_{75} + m_{73} &= \frac{EI}{l} \left[\frac{v}{\operatorname{tg} v} + 8 + 6\varphi_1(1,22v) + 10,67 \right] = \\ &= \frac{EI}{l} \left[\frac{v}{\operatorname{tg} v} + 18,67 + 6\varphi_1(1,22v) \right]. \end{aligned}$$

Из равновесия узла I (рис. 9.67, e) определяем:

$$r_{12} = m_{67} = -\frac{EI}{l} \frac{v}{\sin v}.$$

Проверка: $r_{12} = r_{21}$.

При принятой ОСМП физический смысл всех коэффициентов r_{ik} – это моменты во введенных защемлениях.

Далее повторяем типовой алгоритм решения, выписывая функции, необходимые для данной рамы (табл. 9.6).

Таблица 9.6

v	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$\varphi_1(1,22v)$
0	1,000	1,000	1,000
1	0,6421	1,1885	0,8961
2	−0,9153	2,1995	0,5105

Раскрываем определитель $D(v)$ численно, вычисляя коэффициенты по полученным формулам. Окончательный расчет не приводится, т. к. выполняется аналогично предыдущему примеру.

9.6. Понятие о приближенных методах расчета рам на устойчивость

В случаях, когда степень кинематической неопределенности более четырех и имеет определители высоких порядков, возможно применение приближенных методов расчета. Эти методы заключаются в том, что рама расчленяется на простейшие элементы, состоящие из одной стойки с примыкающими ригелями, для которых $D(v) = r_{11}(v) = 0$.

Следует различать рамы с линейно-неподвижными узлами ($K_2 = 0$) и рамы с линейно-подвижными узлами ($K_2 \neq 0$).

Пример 9.10

Найти приближенное значение $P_{кр}$ для рамы с линейно-неподвижными узлами (рис. 9.68).

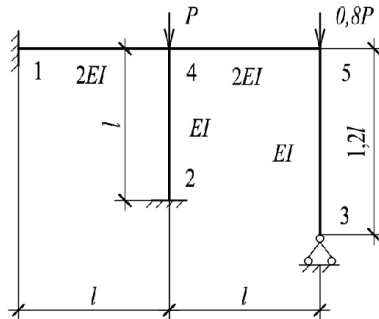


Рис. 9.68

Порядок расчета:

1. Устанавливаем степень кинематической неопределенности

$$K = K_1 + K_2 = 2 + 0 = 2.$$

Линейные перемещения узлов отсутствуют ($K_2 = 0$).

Разобьем раму на элементарные составляющие: стойка 2-4 с примыкающими ригелями 1-4 и 4-5 и стойка 5-3 с ригелем 4-5 (рис. 9.69).

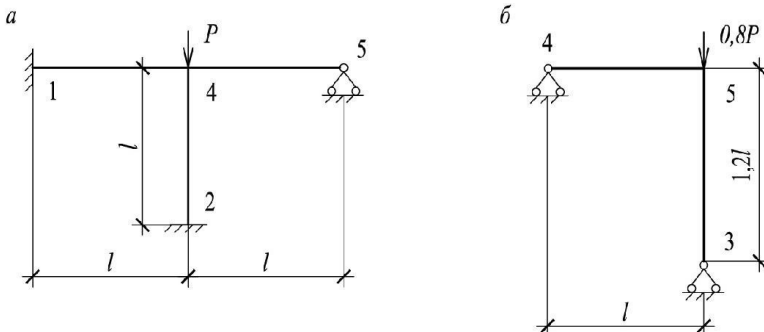


Рис. 9.69

Элементарные составляющие заданной рамы сохраняют линейную неподвижность.

Для простых рам (рис. 9.69, а, б) имеем коэффициенты влияния продольных сил:

$$v_{42} = l_{42} \sqrt{\frac{N_{42}}{EI_{42}}} = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = v; \quad v_{35} = l_{35} \sqrt{\frac{N_{35}}{EI_{35}}} = 1,2l \sqrt{\frac{0,8P}{EI}} = 1,073v.$$

Используем метод перемещений для каждого звена, вводим по одному защемлению в узел 4 и узел 5 (рис. 9.70,а и 9.70,б).

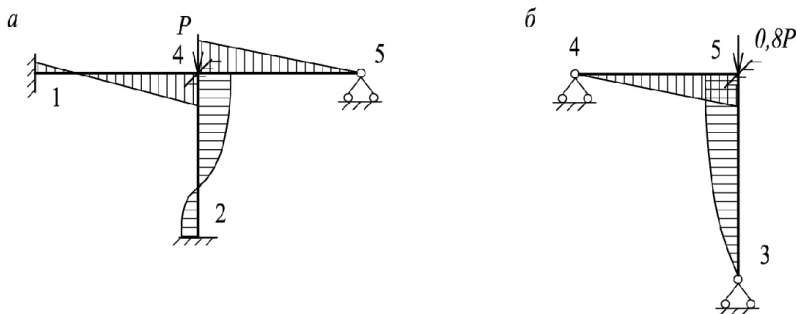


Рис. 9.70

Уравнения устойчивости для обоих звеньев при $K_1 = 1$ представляют определители первого порядка, т. е.

$$r_{11}(v) = 0.$$

Для элементарной системы (рис. 9.70, а) имеем:

$$m_{41} = 4 \frac{EI_{41}}{l_{41}} = 4 \frac{2EI}{l} = 8 \frac{EI}{l};$$

$$m_{45} = 3 \frac{2EI}{l} = 6 \frac{EI}{l};$$

$$m_{42} = 4 \frac{EI_{42}}{l_{42}} \varphi_2(v_{42}) = 4 \frac{EI}{l} \varphi_2(v);$$

$$r_{11} = m_{41} + m_{45} + m_{42} = \frac{EI}{l} [8 + 6 + 4\varphi_2(v)] = 0,$$

отсюда $\varphi_2(v) = -\frac{14}{4} = -3,5$.

По этой функции из таблицы 9.2 определяем $v_{42} = 5,8$ и

$$(P_{кр})_{41} = 5,8^2 \frac{EI}{l^2} = 33,64 \frac{EI}{l^2}.$$

Для элементарной системы со стойкой 3-5 аналогично находим:

$$r_{11}(v) = m_{54} + m_{53} = 3\varphi_1(v_{35}) \frac{EI}{1,2l} + 6 \frac{EI}{l} = 0,$$

отсюда

$$\varphi_1(v_{35}) = -2,4.$$

По табл. 9.2 по значению $\varphi_1(v_{53})$ находим $v_{53} = 4,03$, которому соответствует

$$0,8(P_{кр})_{53} = 4,03^2 \frac{EI}{(1,2l)^2};$$

$$(P_{кр})_{53} = 14,10 \frac{EI}{l^2}.$$

Сопоставляя значения, принимаем в качестве критического параметра

$$(P_{кр})_{53} = 14,10 \frac{EI}{l^2}.$$

Если рассчитать заданную систему на устойчивость «точным» методом, через раскрытие определителя по методике, рассмотренной выше:

$$D(v) = \begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) \end{vmatrix} = 0,$$

то получим $P_{кр} = 14,40 \frac{EI}{l^2}$, т. е. близкое к $\min P_{кр} = 14,10 \frac{EI}{l^2}$, полученному приближенным методом для слабого звена.

На основе многочисленных исследований можно сделать вывод: сложные рамы с линейно-неподвижными узлами нет необходимости рассчитывать на устойчивость «точно». Достаточно расчленить раму на элементарные системы и для каждой из них найти $P_{кр}$. Минимальный из параметров следует принять за критический параметр для заданной сложной рамы.

Пример 9.11

В этом примере рассматривается устойчивость рамы с линейно-подвижными узлами с несимметричной нагрузкой. Для этой категории рам характерна общая форма потери устойчивости, при которой в момент выпучивания стоек происходят как повороты узлов, так и линейные смещения.

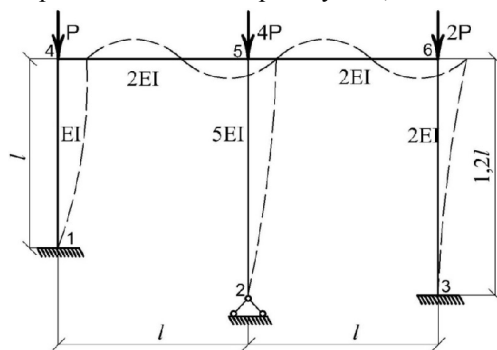


Рис. 9.71

В этих рамах принято заданную систему расчленять на элементарные, представляющие собой стойки с примыкающими подвижными ригелями. Полагают, что при потере устойчивости точка перегиба упругой линии ригелей находится в середине, поэтому в элементарных системах берут половину длин ригелей. Элементарные звенья сохраняют линейную подвижность (рис. 9.72, а, б, в).

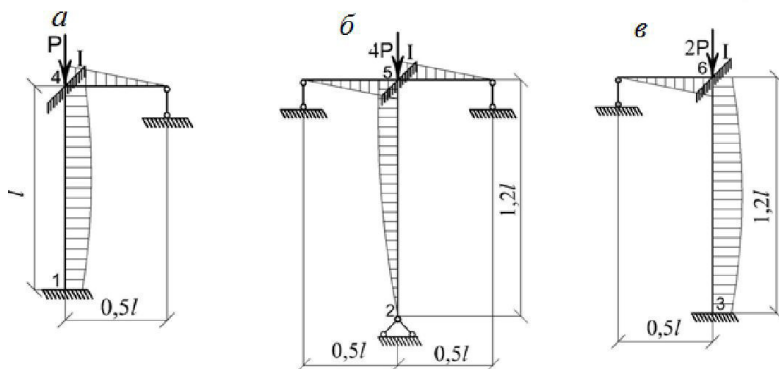


Рис. 9.72

Для каждой из элементарных систем методом перемещений определяем $P_{кр}$.

ОСМП для каждой из рам получена введением одного защемления, линейная подвижность звеньев учтена «эффектом ползуна», уравнение устойчивости при принятой основной системе для каждого звена имеет вид:

$$D(v) = r_{11}(v) = 0.$$

Уравнение устойчивости для звена (рис. 9.72, а) приобретает вид:

$$r_{11}(v) = \frac{3 \cdot 2EI}{l/2} + \frac{EI}{l} \cdot \frac{v}{\operatorname{tg} v} = 0;$$

$\frac{v}{\operatorname{tg} v} = -12$, по этой функции определяем $v = 2,92$. С учетом этого находим

$$P_{кр} = 2,92^2 \frac{EI}{l^2} = 8,5 \frac{EI}{l^2}.$$

Для звена (рис. 9.72, б) имеем:

$$r_{11} = \frac{3 \cdot 2EI}{l/2} + \frac{3 \cdot 2EI}{l/2} - \frac{5EI}{1,2l} v_{25} \operatorname{tg} v_{25} = 0;$$

$$v_{25} \operatorname{tg} v_{25} = \frac{24 \cdot 1,2}{5} = 5,76$$

и по таблице функции $v \operatorname{tg} v$ определяем $v = 1,35$, которому соответствует критическая сила

$$(4P_{кр})_{25} = 1,35^2 \frac{5EI}{(1,2l)^2},$$

откуда

$$(P_{кр})_{25} = 1,58 \frac{EI}{l^2}.$$

Аналогично для схемы (рис. 9.72, в), уравнение устойчивости:

$$r_{11} = 3 \frac{2EI}{l/2} + \frac{2EI}{1,2l} \frac{v_{36}}{\operatorname{tg} v_{36}} = 0,$$

отсюда

$$\frac{v_{36}}{\operatorname{tg} v_{36}} = -\frac{12 \cdot 1,2}{2} = -7,2.$$

По этому значению по табл. 9.2 находим $v_{36} = 2,77$ и с учетом этого

$$(2P_{\text{кр}})_{36} = 2,77^2 \frac{2EI}{(1,2l)^2},$$

откуда

$$(P_{\text{кр}})_{36} = 5,33 \frac{EI}{l^2}.$$

Для рамы в целом получаем приближенное значение критической силы, полученное как среднее:

$$P_{\text{кр}} = \frac{1 P_{\text{кр}}^a + 4 P_{\text{кр}}^b + 2 P_{\text{кр}}^в}{1 + 4 + 2} = \frac{1 \cdot 8,5 + 4 \cdot 1,58 + 2 \cdot 5,33}{1 + 4 + 2} \cdot \frac{EI}{l^2} = 3,64 \frac{EI}{l^2}.$$

Здесь числа: 1, 4, 2 – коэффициенты узловых нагрузок (рис. 9.71).

Исследования показывают, что приближенное значение критической силы меньше «точного», что положительно.

Для многоярусных и многопролетных рам разбиение на элементарные звенья является более сложным и не входит в задачу данного пособия.

9.7. Рамы с бесконечно-жесткими ригелями

В случае, когда жесткость ригеля превышает на порядок (в 10 раз) жесткость стоек, рамы можно рассматривать как рамы с бесконечно-жесткими ригелями. Расчет подобного типа рам проще производить, используя метод перемещений. Сочленение концов стоек с ригелем делится на два типа: шарнирное (рис. 9.73, а) и жесткое (рис. 9.73, б).

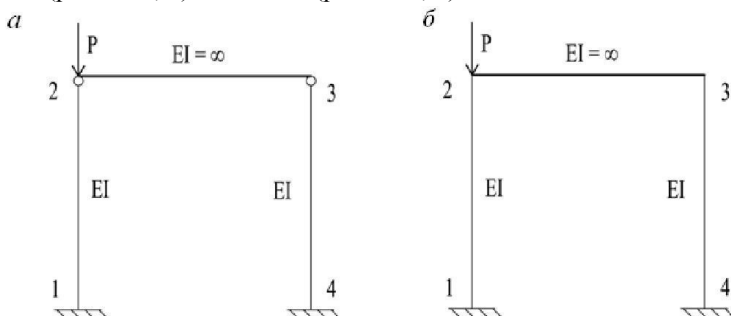


Рис. 9.73

При расчете по методу перемещений на рамы: схема (рис. 9.73, а) и схема (рис. 9.73, б) – достаточно наложить одну линейную связь. Основная система метода перемещений представлена на рис. 9.74, а и 9.74, б.

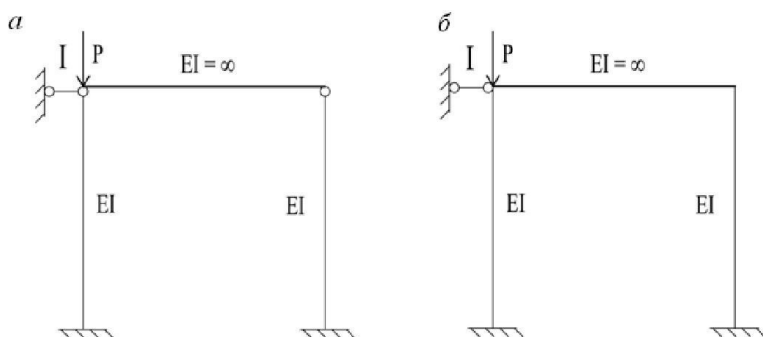


Рис. 9.74

При смещении линейной связи на $Z_1=1$ эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 9.75, а.

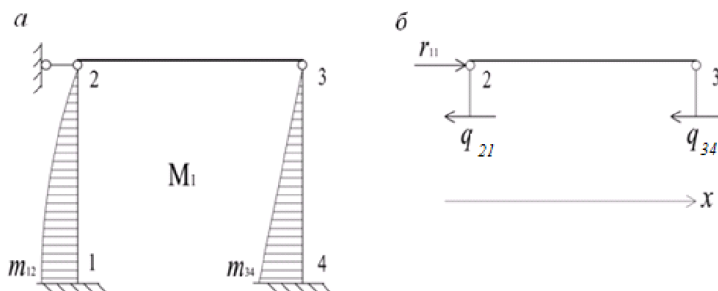


Рис. 9.75

Уравнение устойчивости будет иметь вид

$$\Sigma X = 0 \text{ или } r_{11}(v) = q_{21} + q_{34} = 0.$$

С учетом поперечных сил q_{21} и q_{34} , определенных из табл. 8.1 и табл. 9.2, имеем:

$$3 \frac{EI}{l^3} \eta_1(v) + 3 \frac{EI}{l^3} = 3 \frac{EI}{l^3} (\eta_1(v) + 1) = 0,$$

отсюда $\eta_1(v) = -1$.

По этому значению из табл. 9.2 находим $v=2,21$. Тогда критическая сила для случая шарнирного сочленения с ригелем равна:

$$P_{кр} = v^2 \frac{EI}{l^2} = 2,21^2 \frac{EI}{l^2} = 4,88 \frac{EI}{l^2}.$$

Рассмотрим случай жесткого сочленения ригеля со стойкой (рис. 9.74, б).

Решение осуществляем, как изложено выше, но здесь ригель при потере устойчивости не поворачивается, и расчетная схема стоек рассматривается как стержни с защемленными концами.

Эпюры моментов в стойках показана на рис. 9.76, а.

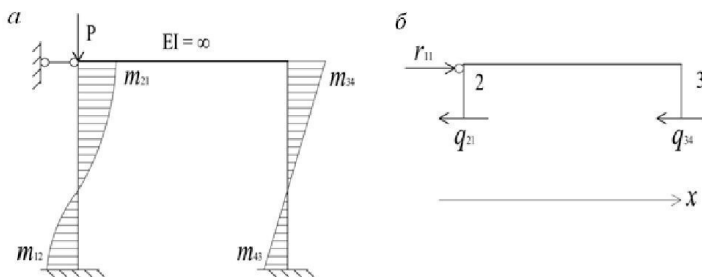


Рис. 9.76

Из условия равновесия ригеля 2-3, $\Sigma X = 0$ (рис. 9.76, б), уравнение устойчивости имеет вид:

$$r_{11} = q_{21} + q_{34} = 0;$$

или

$$r_{11} = 12 \frac{EI}{l^3} \eta_2(v) + 12 \frac{EI}{l^3} = 0,$$

отсюда $\eta_2(v) = -1$, $v = 4,41$ (табл. 9.2).

С учетом параметра v находим критическую силу $P_{кр} = 19,45 \frac{EI}{l^2}$. Сравнивая рассмотренные случаи, делаем вывод, что критический параметр существенно зависит от характера скрепления ригеля со стойкой.

В рассматриваемой главе изложена методика расчета на устойчивость стержневых систем, которая заложена в программные комплексы для расчета на устойчивость.

10. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ УПРУГИХ СИСТЕМ

10.1. Понятия

Особое значение для задач машиностроения и строительства имеют так называемые механические колебания упругих систем. Известны случаи, когда строительные конструкции, например мосты, рассчитанные с большим запасом прочности на статическую нагрузку, разрушались под действием сравнительно небольших периодически действующих сил. При некоторых режимах резания на станках возбуждаются колебания, одинаково вредные как для самих станков, так и для обрабатываемых изделий. Если не установлены причины, обуславливающие возникновение этих колебаний, то ухудшается качество обрабатываемой поверхности и ограничивается скорость резания. Причиной колебаний является внешнее воздействие различного характера, наиболее распространенными из них являются динамические нагрузки.

Нагрузки являются динамическими, если их величина, направление или положение изменяются во времени. При действии динамических нагрузок возникают и имеют существенное значение силы инерции масс этих нагрузок и самих сооружений и конструкций.

По характеру воздействия динамические нагрузки бывают различными и подразделяются на следующие основные виды:

1. Вибрационная нагрузка – пульсирующая сила, которая изменяется по гармоническому закону, создается машинами и механизмами с движущимися частями (электромоторы, станки, турбогенераторы и др.);

2. Ударная нагрузка характеризуется небольшой продолжительностью действия, создается падающими грузами и частями силовых установок (молотов, копров и др.);

3. Подвижная нагрузка, передающаяся на сооружение от различных транспортных средств (поездов, машин, мостовых кранов), проходящих по мостовым конструкциям;

4. Сейсмическая нагрузка, возникающая во время землетрясений;

5. Кратковременная нагрузка (импульс), характеризуется мгновенным действием (взрыв).

Расчет сооружений на действие динамических нагрузок того или иного вида отличается определенными особенностями, но обычно применяют два метода: статический и энергетический.

Статический метод основан на использовании уравнений динамического равновесия. Суть состоит в том, что в любой момент времени сооружение

рассматривается в равновесии под действием заданных динамических нагрузок, инерционных сил (по Даламберу) и моментов масс.

Энергетический метод основан на законе сохранения энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергий упругой системы в любой момент времени есть величина постоянная:

При динамических расчетах будем рассматривать только малые перемещения, при которых не нарушается закон независимости действия сил и остается справедливой гипотеза о пропорциональности между силами и деформациями.

Все динамические нагрузки вызывают колебания сооружений и конструкций. В зависимости от характера возбуждающих сил различают свободные и вынужденные колебания, параметрические и автоколебания.

Свободные (собственные) колебания присущи любому сооружению. Они возникают под действием мгновенно приложенной силы. Например, если балку вывести из состояния равновесия какой-либо силой, то после снятия силы балка будет совершать свободные колебания.

Вынужденные колебания возникают под действием внешней переменной во времени силой. Если эти силы изменяются по гармоническому закону с частотой, совпадающей с собственной, то возникает опасное явление резонанса.

Параметрические колебания – это колебания, происходящие в результате изменения параметров самой системы. Например, стоя на качелях, можно раскачать их периодическим приседанием, т. е. изменением положения центра тяжести колеблющейся массы относительно центра подвеса.

Самовозбуждающиеся или автоколебания – это незатухающие периодические колебания системы, характеризующиеся наличием неперiodического источника энергии и обратной связи, регулирующей поступление энергии из источника. Например, часовой механизм.

По характеру возникающих деформаций различают продольные, крутильные, поперечные (изгибные) и изгибно-крутильные колебания.

В зависимости от объективных условий колебания сооружений могут быть:

- линейными или нелинейными;
- периодическими или непериодическими;
- затухающими или незатухающими;
- по числу степеней свободы: с одной, с несколькими, с бесконечным количеством.

При изучении колебаний упругих систем последние принято различать по числу степеней свободы. Под числом степеней свободы понимается число

независимых координат, определяющих положение системы на плоскости или в пространстве. Другими словами, число степеней равно минимальному количеству связей, которые необходимо ввести, чтобы все массы были неподвижны. Трудоемкость динамического расчета зависит от динамической степени (числа) свободы системы.

Число степеней свободы фактически определяется выбором расчетной схемы, то есть той степенью приближения, с которой мы считаем необходимым (или возможным) исследовать реальный объект.

В простейших случаях положение системы может быть определено только одной величиной. Такие системы называются системами с одной степенью свободы. Например, такой простейший случай изображен на рис. 10.1, *а*. Если устройство таково, что возможны только вертикальные перемещения груза P , и если масса пружинки мала по сравнению с величиной массы груза P , то систему можно рассматривать как систему, имеющую одну степень свободы. Положение такой колебательной системы может быть определено одним параметром – вертикальным перемещением груза.

Могут быть системы с несколькими степенями свободы. Например, невесомая балка, несущая две массы, показанная на рис. 10.1, *б*, обладает двумя степенями свободы. В качестве независимых параметров в ней будут y_1 -перемещения масс m_1 и m_2 по отношению к положению равновесия. Нужно заметить, что при более точном выборе расчетной схемы колеблющейся системы ее необходимо выбрать в качестве системы с бесконечным числом степеней свободы. Примером системы с бесконечным числом степеней свободы будет балка с распределенной массой (рис. 10.1, *в*). При этом прогиб y в любой точке балки будет зависеть от абсциссы x и времени t , то есть он является непрерывной функцией $y(x, t)$.

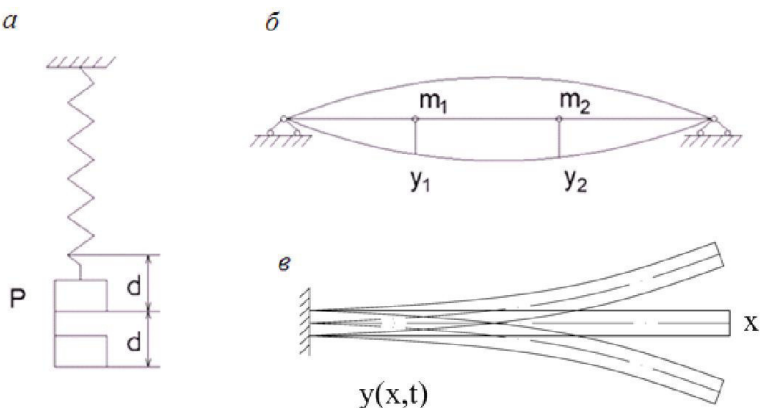


Рис. 10.1

При исследовании упругих колебаний различают собственные и вынужденные колебания. Собственными называются колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего или мгновенного воздействия на систему. Внешнее воздействие вызывает у точек системы начальные отклонения от положения равновесия. После удаления внешнего воздействия движение системы происходит благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.

Вследствие наличия сил сопротивления колебательному движению (сопротивление среды, в которой происходит движение, трение в подшипниках или опорах, трение в сочленениях конструкции, силы внутреннего трения в материале) во всех механических системах собственные колебания всегда затухают. В этом заключается важная особенность собственных колебаний по сравнению с другими типами колебательных движений.

10.2. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

Основной характеристикой собственных колебаний является частота колебаний, которая в случае систем с одной степенью свободы определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11} \cdot P}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm,p}}}, \quad (10.1)$$

где ω – круговая частота собственных колебаний, представляющая собой число колебаний за 2π секунд;

m – масса колеблющегося груза;

δ_{11} – перемещение массы под действием статически приложенной единичной силы.

Техническая частота связана с круговой формулой:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (10.2)$$

она измеряется в герцах и равна числу колебаний в секунду.

В случае учета сил сопротивления, принимая линейный характер затухания, частота колебаний определяется выражением

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2},$$

где n – характеристика затухания.

Величина ω_1 мало отличается от ω , то есть от частоты собственных колебаний без учета затухания, поскольку значение n^2 практически ничтожно

по сравнению с ω^2 , поэтому обычно при вычислении частоты собственных колебаний пренебрегают влиянием затухания.

Формула (10.1) справедлива как для поперечных, так и для продольных колебаний. Для крутильных колебаний круговая частота собственных колебаний определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{I}}, \quad (10.3)$$

где c – крутильная жесткость вала, равная скручивающему моменту, необходимому для закручивания вала на один радиан;

I – момент инерции диска относительно оси стержня, перпендикулярной к плоскости диска.

Примеры определения частот собственных колебаний

Пример 10.1

Определить частоту собственных колебаний массы m , установленной посередине стальной балки (рис. 10.2). Жесткости участков различны, но постоянны по их длине.

Дано: модуль упругости $E = 200$ ГПа, осевой момент инерции поперечного сечения балки $I = 63,82 \text{ см}^4$, длина балки $l = 1$ м, $P = 1$ кН.

Круговая частота собственных колебаний определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \cdot m_1}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11} \cdot P}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст(P)}}}.$$

m_1 – масса колеблющегося груза:

$$m = \frac{P}{g};$$

δ_{11} – статический прогиб в точке установки массы m , вызванный единичным значением силы.

Определяем статический прогиб в точке приложения m , используя интеграл Мора и формулу Верещагина. Эпюры изгибающих моментов M_p от силы P и \bar{M}_1 от единичной силы $P_1 = 1$ представлены на рис. 10.2.

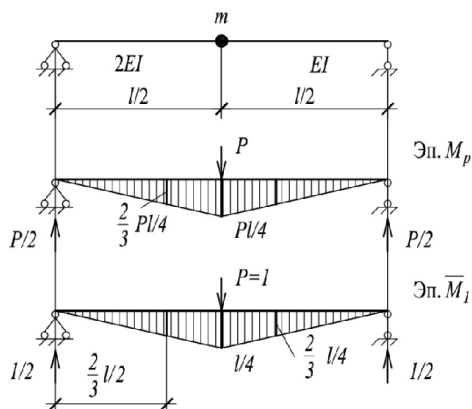


Рис. 10.2

Статический прогиб определяем путем перемножения эюр M_p и \bar{M}_1 :

$$\begin{aligned}\Delta_{\bar{M}_1(P)} &= \sum \int \frac{\bar{I}_1 \cdot \dot{I}_P}{EI} dx = \frac{P \cdot l \cdot l \cdot 2 \cdot l}{2(2 \cdot EI) \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot l \cdot P \cdot l \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot EI \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4} = \\ &= \frac{P \cdot l^3}{192 \cdot EI} + \frac{P \cdot l^3}{96 \cdot EI} = \frac{3 \cdot P \cdot l^3}{192 \cdot EI} = \frac{P \cdot l^3}{64 \cdot EI}, \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\bar{M}_1(P)}}} = \sqrt{\frac{64 \cdot EI \cdot g}{Pl^3}} = 8 \cdot \sqrt{\frac{EI \cdot g}{Pl^3}}.\end{aligned}$$

Учитывая: $P = 1 \text{ кН}$; $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $l = 1 \text{ м}$; $I = 63,82 \text{ см}^4$.

$$\omega = 8 \cdot \sqrt{\frac{9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 63,82 \cdot 10^{-8}}{1000 \cdot 1,00^3}} = 283,08 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Круговая частота собственных колебаний:

$$\omega = 283,08 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Пример 10.2

Определить частоты собственных колебаний рамы (рис. 10.3).

Жесткости стержней, их размеры и массу считаем известными.

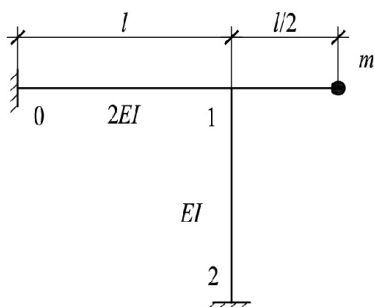


Рис. 10.3

Решение

Рассматриваемая рама имеет одну динамическую степень свободы $W_d = 1$. Для определения частоты собственных колебаний по формуле 10.1 необходимо найти статическое перемещение $\Delta_{ст}$ массы m .

Для этого, переходим от заданной системы (рис. 10.3) к расчетной схеме (рис. 10.4), приложив в точке установки массы силу $P = mg$.

Устанавливаем, является эта система статически определимой или нет. Анализ показывает, система статически неопределимая. По методу сил она трижды статически неопределима ($n = 3$), т. е. имеет три лишних связи, а по методу перемещений степень кинематической неопределимости равна единице, то есть рама имеет один линейно неподвижный узел ($K_1 = 1$) (рис. 10.4). Для раскрытия неопределимости используем метод перемещений, так как он в этом случае более рационален.

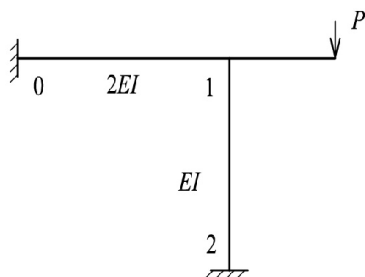


Рис. 10.4

Основная система метода перемещений (рис. 10.5) получена из заданной путем наложения на жесткий внеопорный узел 1 защемления I, которое препятствует лишь повороту узла 1.

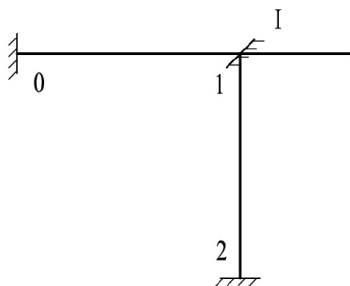


Рис. 10.5

Таким образом, рама (рис. 10.5), содержащая дополнительную связь (защемление) I , и есть основная система метода перемещений. Основная система состоит из совокупности двух статически неопределимых балок (0-1 и 0-2) с заделками по концам и статически определяемой консольной балки.

Каноническое уравнение метода перемещения:

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1p} = 0,$$

где r_{11} – реактивное усилие в I связи от поворота этой связи на угол $Z_1 = 1$;

R_{1p} – то же от внешней нагрузки;

Z_1 – действительный угол поворота I связи (защемления).

Загружаем основную систему (рис. 10.6) внешней нагрузкой P . И строим эпюру изгибающих моментов (M_p) от этого нагружения.

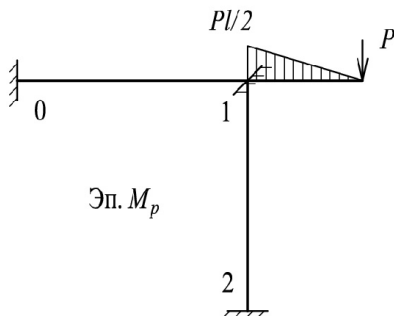


Рис. 10.6

В защемлении I возникает реактивное усилие R_{1p} , которое можно найти из условия равновесия узла 1 (рис. 10.7).

Из уравнения $\sum M_{(1)} = 0$; $R_{1p} = \frac{P \cdot l}{2}$.

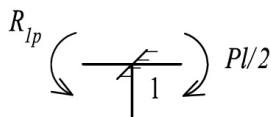


Рис. 10.7

Строим эпюру изгибающих моментов от поворота защемления I узла 1 на угол $Z_1 = 1$. Тогда в стержнях (1-0) и (1-2), примыкающих к защемлению, возникают реактивные изгибающие моменты, которые определяем по таблице 8.1 (строка 3):

$$m_{10} = 4 \cdot \frac{EI_{10}}{l_{10}} = 4 \cdot \frac{2 \cdot EI}{l} = 8 \cdot \frac{EI}{l};$$

$$m_{10} = 4 \cdot \frac{EI}{l}, \quad m_{12} = 4 \cdot \frac{EI}{l}, \quad m_{21} = 2 \cdot \frac{EI}{l}.$$

Эпюра изгибающих моментов, построенная по этим значениям, показана на рис. 10.8.

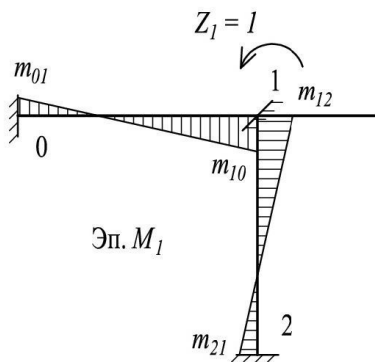


Рис. 10.8

Определяем реактивное усилие в защемлении r_{11} , вызванное поворотом этой связи на угол $Z_1 = 1$ против часовой стрелки.

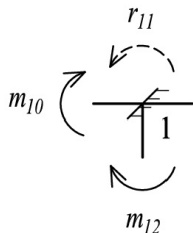


Рис. 10.9

Если вырезать узел 1 (рис. 10.9), то в защемлении реактивный момент:

$$r_{11} = m_{10} + m_{12} = (8 + 4) \cdot \frac{EI}{l} = 12 \cdot \frac{EI}{l}.$$

Реактивный момент r_{11} положителен, так как его направление совпадает с направлением угла поворота Z_1 .

Производим решение канонического уравнения.

С учетом найденных коэффициентов имеем

$$12 \cdot \frac{EI}{l} \cdot Z_1 + \frac{Pl}{2} = 0;$$

$$Z_1 = -\frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{12EI} = -\frac{Pl^2}{24EI}.$$

Определяем действительные моменты.

Вычисления производим по формуле:

$$M^k = M_p^k + M_1^k \cdot Z_1.$$

Здесь k – сечение, в котором определяется момент.

Для вычисления действительного момента в сечении K используем эпюры M_p и M_1 . Эпюры действительных моментов показаны на рис. 10.10.

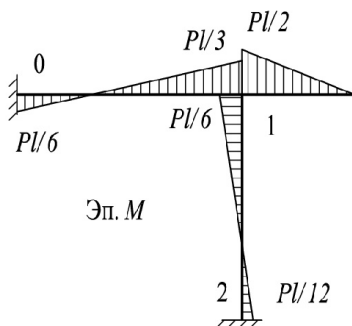


Рис. 10.10

Выполняем проверки:

а) деформационная проверка.

Для этого выбираем любую основную систему метода сил и строим для нее эпюру моментов от единичной силы или момента. Одна из них представлена на рис. 10.11. Это эпюра, вызванная действием реактивного момента $\bar{M}_1 = 1$ отброшенной заделки.

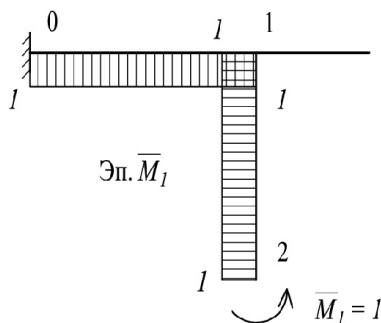


Рис. 10.11

Производим перемножения этой эпюры \bar{M}_1^* с эпюрой действительных моментов – M , используя, как в методе сил, интеграл Мора и способ Верещагина.

Вычисляем выражение от этого перемножения:

$$\sum \int \frac{\dot{l} \cdot \bar{l}_1^*}{E \cdot I} dx \cong 0.$$

$$\frac{l}{6 \cdot 2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(2 \cdot \frac{P \cdot l}{6} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{P \cdot l}{3} \cdot 1 + \frac{P \cdot l}{6} \cdot 1 - \frac{P \cdot l}{3} \cdot 1 \right) +$$

$$+ \frac{l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \left(2 \cdot \frac{P \cdot l}{6} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{P \cdot l}{12} \cdot 1 + \frac{P \cdot l}{6} \cdot 1 - \frac{P \cdot l}{12} \cdot 1 \right) = \frac{3 \cdot P \cdot l}{72 \cdot E \cdot I} - \frac{3 \cdot P \cdot l}{72 \cdot E \cdot I} \cong 0,$$

что свидетельствует о правильности расчетов.

б) статическая проверка.

Эта проверка является окончательной и говорит о правильности решенной задачи, найденных действительных усилий, если $\sum M_1 = 0$.

Вырезанный узел (рис. 10.12, а) из заданной системы должен находиться в равновесии.

$$\sum M_{(1)} = \frac{P \cdot l}{3} + \frac{P \cdot l}{6} - \frac{P \cdot l}{2} \cong 0.$$

Проверки выполняются, значит, эпюра «М» построена верно.

Определяем прогиб в точке установки массы.

Для этого выбираем любую основную систему метода сил и прикладываем в точке установки массы единичную безразмерную силу (рис. 10.11). Строим эпюру \bar{M}_2 от этой силы (рис. 10.12, б).

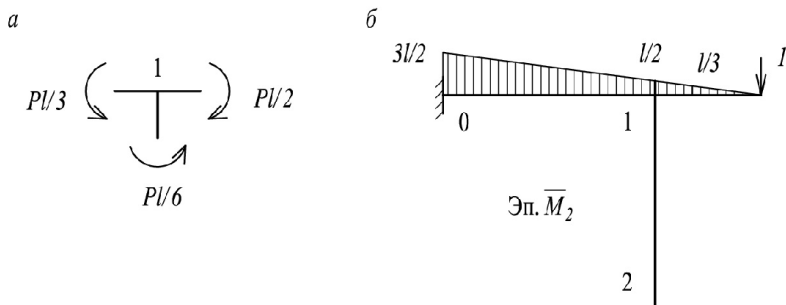


Рис. 10.12

Перемножая M на \bar{M}_2 по способу Верещагина, находим статический прогиб в месте приложения массы (груза) m :

$$\Delta_{\text{ст}} = \sum \int \frac{\dot{l} \cdot \bar{M}_2}{E \cdot I} dx = \frac{l}{6 \cdot 2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(-2 \cdot \frac{P \cdot l}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot l + 2 \cdot \frac{P \cdot l}{3} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{2} + \frac{P \cdot l}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot l \right) + \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{P \cdot l \cdot l \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{l}{12 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot P \cdot l^2 \right) + \frac{P \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} = \frac{3 \cdot P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{P \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}.$$

Определяем частоту собственных колебаний.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g \cdot 16 \cdot EI}{Pl^3}}.$$

Пример 10.3

Определить частоту собственных колебаний сосредоточенной массы $m = 2800$ кг, расположенной посередине ригеля рамы (рис. 10.13). Жесткость элементов рамы постоянна и равна $E \cdot I_x = 81,84 \text{ т} \cdot \text{м}^2$. $l = 6$ м. Массой рамы по сравнению с массой груза можно пренебречь.

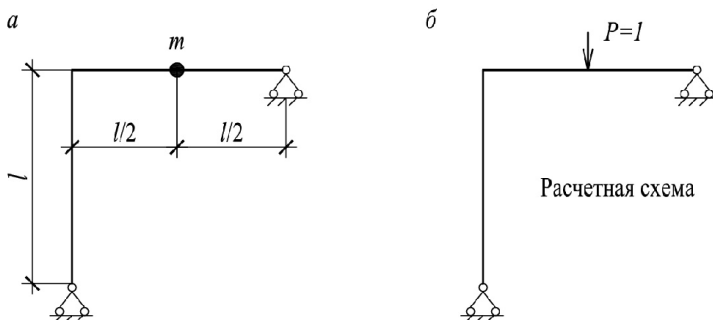


Рис. 10.13

Решение

Динамическая степень свободы $W_d = 1$. Частота собственных колебаний определяется по формуле (10.1), для её вычисления так же как в предыдущей задаче необходимо найти статическое перемещение $\Delta_{ст}$ в точке установки массы m . Так как рама статически неопределима, то в начале расчета, раскрываем статическую неопределимость в раме по методу сил.

Порядок расчета по методу сил

Устанавливаем степень статической неопределимости по формуле:

$$n = 3K - \Pi = 3 \cdot 1 - 2 = 1,$$

где $K = 1$ – количество замкнутых контуров,

$\Pi = 2$ – количество одиночных шарниров.

Можно определить степень статической неопределимости по другой формуле:

$$n = C_0 - Y - \Pi,$$

где C_0 – количество неизвестных реактивных усилий, Y – число независимых уравнений статики, которые можно составить для данной системы, если система плоская, то $Y = 3$, если пространственная, то $Y = 6$.

Для рамы (рис. 10.13): $n = 4 - 3 = 1$.

Рассматриваемая рама однажды статически неопределима.

2. Образует основную систему метода сил путем отбрасывания линейной связи и загружаем ее нагрузкой $P = 1$ кН, приложенной в точке установки массы, и силой X_1 , отброшенной связи (рис. 10.14, а). Такая система является эквивалентной.

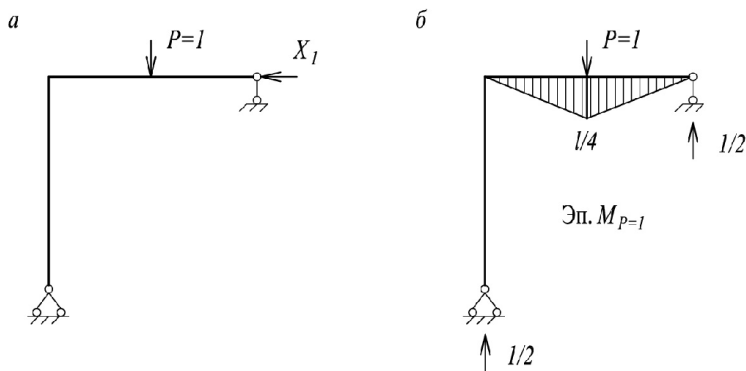


Рис. 10.14

Каноническое уравнение метода сил такой системы имеет вид:

$$\delta_{11}^0 \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

где $\delta_{11}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2}{E \cdot I} \cdot dx$ – относительное перемещение в основной системе метода сил по направлению действия силы X_1 , от действия силы $X_1 = 1$;

Δ_{1P} – грузовой коэффициент, представляющий относительное перемещение по направлению X_1 от действия внешней нагрузки P .

3. Строим эпюры изгибающих моментов M_p , \overline{M}_1 (рис. 10.14, б, 10.15, а) путем последовательного нагружения основной системы силами $P = 1$ кН и $X_1 = 1$;

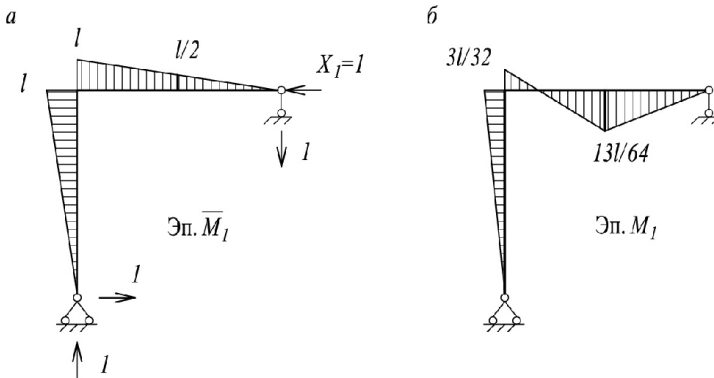


Рис. 10.15

4. Вычисляем коэффициенты δ_{11}^0 и Δ_{1P} посредством интеграла Мора и правила Верещагина:

$$\delta_{11}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = 2 \cdot \frac{l \cdot l}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l = \frac{2 \cdot l^3}{3EI},$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_1}{EI} dx = -\frac{l}{2 \cdot 6 \cdot EI} \left(0 - 2 \cdot \frac{1 \cdot l}{4} \cdot \frac{1 \cdot l}{2} + 0 - \frac{1 \cdot l \cdot 1 \cdot l}{4} \right) -$$

$$-\frac{1 \cdot l \cdot l}{4 \cdot 2 \cdot EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{l}{2} = -\frac{l^3}{16EI}.$$

5. Решаем каноническое уравнение метода сил.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{l^3}{E \cdot I} \cdot X_1 - \frac{l^3}{16 \cdot E \cdot I} = 0.$$

Откуда $X_1 = \frac{3}{32} \kappa H$.

6. Строим эпюру действительных изгибающих моментов, используя зависимость

$$M_k = M_{1p}^k + \overline{M}_1^k \cdot X_1,$$

где κ – сечение, в котором вычисляется момент.

Окончательная эпюра моментов M_1 показана на рис. 10.15, б.

7. Выполняем деформационную проверку путем перемножения эпюр M_1 на \overline{M}_1 .

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_1}{EI} dx &= \frac{3l}{32 \cdot 2} \cdot \frac{l}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l + \\ &+ \frac{l}{2 \cdot 6 \cdot EI} \left(2 \cdot \frac{3l}{32} - 1 \cdot l - 2 \cdot \frac{13l}{64} - \frac{13 \cdot l}{64} + \frac{3l}{32} \cdot 1 \cdot \frac{l}{2} \right) - \\ &- \frac{13 \cdot l}{64 \cdot 2} \cdot \frac{l/2}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot l \cong 0. \end{aligned}$$

8. Статическая проверка.

Вырезанный узел или любая часть рамы должны находиться в равновесии, что выполняется.

9. Определяем перемещение (прогиб) в месте установки массы.

Для этого надо выбрать новую основную систему метода сил или оставить ту, которую использовали для раскрытия статической неопределенности (рис. 10.14, а), загрузить единичной силой $P = 1$ в месте установки массы. Затем построить эпюру изгибающих моментов от этого нагружения и перемножить эту эпюру \overline{M}_1^* с эпюрой действительных моментов M_1 (рис. 10.15, б).

В нашем случае: для определения прогиба в месте установки массы (рис. 10.15, б) перемножаем эпюру M_1 саму на себя, используя правило Верещагина, получим перемещение δ_{11} , вызванное единичным значением нагрузки $P = 1$ кН. Тогда для определения полного перемещения умножаем это значение δ_{11} на P . Результат будет одинаков.

С учетом последнего имеем:

$$\Delta_{\overline{m}} = \delta_{11} \cdot P.$$

Прогиб, вызванный единичной нагрузкой $P = 1$ кН, определяется из выражения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx &= \frac{3}{32} \cdot \frac{l}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{32} + \frac{l}{2 \cdot 6 \cdot EI} \left(2 \cdot \frac{3}{32} \cdot l \cdot \frac{3}{32} \cdot l + 2 \frac{13 \cdot l}{64} \cdot \frac{13 \cdot l}{64} + \frac{3 \cdot l}{32} \cdot \frac{13l}{64} + \right. \\ &+ \left. \frac{13l}{64} \cdot \frac{3 \cdot l}{32} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{13 \cdot l}{64} = \frac{23l^3}{1536 \cdot EI}. \end{aligned}$$

Вычисляем круговую частоту по любой из этих формул:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} \cdot m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11} \cdot P}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}, \\ \omega &= \sqrt{\frac{1536 \cdot EI}{23 \cdot l^3 \cdot m}} = \sqrt{\frac{1536 \cdot 81,84 \cdot 10^6}{23 \cdot 6^3 \cdot 2800}} = 95,1 \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Техническая частота:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{95,1}{2 \cdot 3,14} = 15,1 \text{ Гц}.$$

Пример 10.4

Определить частоту собственных колебаний для статически определимой фермы (рис. 10.16), если в узле 3 установлен груз $P = 120$ кН.

Площади поперечных сечений стержней верхнего пояса $A_{02} = A_{24} = A_{46} = A_{67} = 100$ см², а всех остальных стержней – 50 см².

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

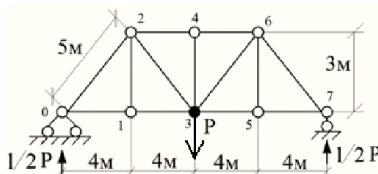


Рис. 10.16

Решение

Перемещение узла 3 определяем по формуле:

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{N_p \cdot N_i}{E \cdot A_i} \cdot l_i$$

где N_i – усилия в i стержнях от единичной силы, приложенной в узле 3;

N_p – усилия в стержнях от внешней нагрузки P ;

n – количество стержней в ферме.

Данные расчета сведем в таблицу.

Таблица 10.1

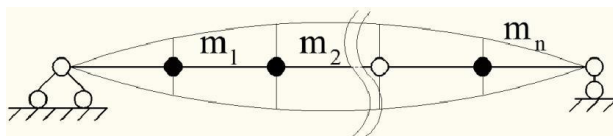
N стержня	Длина стержня L , м	Площадь поперечного сечения, см ² A	Усилие в стержне от единичной силы N_i	Усилие в стержне от внешней нагрузки N_p , кН	$N_i N_p \frac{l}{A}$, кН/м, $\cdot 10^4$
0-2	5	100	-5/6	-100	12,50/3
6-7	5	100	-5/6	-100	12,50/3
2-4	4	100	-4/3	-160	25,60/3
4-6	4	100	-4/3	-160	25,60/3
0-1	4	50	2/3	80	12,80/3
5-7	4	50	2/3	80	12,80/3
1-3	4	50	2/3	80	12,80/3
3-5	4	50	2/3	80	12,80/3
1-2	3	50	0	0	0
5-6	3	50	0	0	0
3-4	3	50	0	0	0
2-3	5	50	5/6	100	12,50/3
3-6	5	50	5/6	100	12,50/3

$$\Delta_{\text{CT}} = \sum_{i=1}^{m=13} \frac{N_p \cdot N_i}{E \cdot A_i} \cdot l_i = \frac{50,8}{E} = \frac{50,8 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11}} = 2,54 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,254 \text{ см.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{CT}}}} = \sqrt{\frac{981}{0,254}} = \sqrt{3862} = 62,15 \frac{1}{\text{сек}};$$

Для системы с n степенями свободы уравнения описываемых колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned}
& (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda) \cdot A_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot A_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot m_n \cdot A_n = 0. \\
& \delta_{21} \cdot m_1 \cdot A_1 + (\delta_{22} \cdot m_2 - \lambda) \cdot A_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot m_n \cdot A_n = 0. \\
& \dots\dots\dots \\
& \dots\dots\dots \\
& \delta_{n1} \cdot m_1 \cdot A_1 + \delta_{n2} \cdot m_2 \cdot A_2 + \dots + (\delta_{nn} \cdot m_n - \lambda) \cdot A_n = 0.
\end{aligned} \tag{10.4}$$



В матричном виде эти уравнения записываются:

$$\begin{aligned} (A_* - \lambda \cdot E) \cdot \vec{V} &= 0. \\ A_* &= \begin{bmatrix} \delta_{11} m_1 & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 & \dots & \delta_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_2 & \dots & \delta_{nn} m_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} - \text{собственное число матрицы } A_*.$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_3 \end{bmatrix} \text{ — собственный вектор матрицы } A^*.$$

372

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} - \text{единичная матрица.}$$

Система (10.2) представляет собой систему однородных алгебраических уравнений относительно координат векторов. Она может иметь не нулевое решение, ($\bar{V} \neq 0$) если определитель этой системы равен нулю, то есть:

$$|A_* - \lambda E| = 0. \quad (10.6)$$

Уравнение (10.3) называется характеристическим уравнением матрицы A_* . Собственные числа λ называются характеристическими.

В развернутом виде уравнение (10.3) имеет вид:

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda) & \delta_{12} \cdot m_2 & \dots & \delta_{1n} \cdot m_n \\ \delta_{21} \cdot m_1 & (\delta_{22} \cdot m_2 - \lambda) & \dots & \delta_{2n} \cdot m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} \cdot m_1 & \delta_{n2} \cdot m_2 & \dots & (\delta_{nn} \cdot m_n - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (10.7)$$

Это уравнение впервые получено астрономами. Характеристические числа в нем, представляющие собой квадраты периодов движения планет, измеряются весьма большими числами – веками. Поэтому это уравнение называется вековым.

Если определитель (10.7) раскрыть, то получим уравнение n -ой степени относительно λ .

$$\lambda^n + b_1 \cdot \lambda^{n-1} + b_2 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1} \cdot \lambda + b_n = 0. \quad (10.8)$$

Решая это уравнение, получим спектр собственных $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots > \lambda_n$ и соответствующие частоты $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < \omega_n$.

При решении этого уравнения используется численная процедура отыскания λ_i , основу которой составляет построение зависимости $\det(\lambda)$ от λ посредством ЭВМ (рис. 10.18).

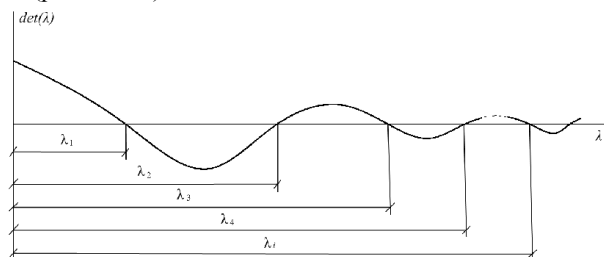


Рис. 10.18

Каждому характеристическому числу λ_i соответствует свой собственный вектор $\bar{V}_i (i=1,2,3,\dots,n)$ и уравнению 10.5 будет соответствовать n равенств

$(A - \lambda_i E)\vec{V}_i = 0$. Таким образом, решение задачи о свободных колебаниях системы с n степенями свободы сводится к определению всех характеристических чисел λ_i и всех собственных векторов \vec{V}_i , по характеристическим числам λ_i определяются частоты системы $\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$.

Примечания:

1. Характеристические числа всегда вещественны и положительны ($\lambda_i > 0$).
2. Сумма λ_i равна следу матрицы A^* , то есть сумме ее членов по главной диагонали:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} \cdot m_i = S_p \cdot A_*. \quad (10.9)$$

3. Произведение λ_i равно определителю матрицы A^* :

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \dots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A_*. \quad (10.10)$$

По найденным λ_i определим частоты ω_i . При любой частоте вековое уравнение должно быть удовлетворено, и определитель D обращается в ноль. Каждой частоте соответствует своя совокупность D значений амплитуд A_i (координат собственных векторов \vec{V}). Амплитуды (амплитудные коэффициенты) обозначаются с двумя индексами – A_{ki} . Первый индекс указывает номер координаты перемещения массы y_i , а второй – номер частоты. Подставив λ_i в уравнение (10.4) вместо λ , получим следующую систему однородных уравнений для определения амплитудных коэффициентов:

$$\begin{aligned} & (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda_i) \cdot A_{4i} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot A_{2i} + \dots + \delta_{1n} \cdot m_n \cdot A_{ni} = 0. \\ & \delta_{21} \cdot m_1 \cdot A_{4i} + (\delta_{22} \cdot m_2 - \lambda_i) \cdot A_{2i} + \dots + \delta_{2n} \cdot m_n \cdot A_{ni} = 0. \\ & \dots\dots\dots \\ & \delta_{n1} \cdot m_1 \cdot A_{4i} + \delta_{n2} \cdot m_2 \cdot A_{2i} + \dots + (\delta_{nn} \cdot m_n - \lambda_i) \cdot A_{ni} = 0. \end{aligned} \tag{10.11}$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Если в этой системе все члены разделить, например, на A_{li} и обозначить отношение $\frac{A_{ki}}{A_{li}} = \rho_{ki}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), то получим новую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda) \cdot \rho_{1i} + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \rho_{2i} + \dots + \delta_{1n} \cdot m_n \cdot \rho_{ni} = 0. \\
& \delta_{21} \cdot m_1 \cdot \rho_{1i} + (\delta_{22} \cdot m_2 - \lambda) \cdot \rho_{2i} + \dots + \delta_{2n} \cdot m_n \cdot \rho_{ni} = 0. \\
& \dots\dots\dots \\
& \dots\dots\dots \\
& \delta_{n1} \cdot m_1 \cdot \rho_{1i} + \delta_{n2} \cdot m_2 \cdot \rho_{2i} + \dots + (\delta_{nn} \cdot m_n - \lambda) \cdot \rho_{ni} = 0.
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Отсюда определяются отношения $\frac{A_{ki}}{A_{li}} = \rho_{ki}$, которых будет на единицу меньше числа уравнений. Одно из уравнений будет линейной комбинацией остальных и может быть отброшено.

Собственный вектор \bar{V}_i , соответствующий системе 10.12, запишем в виде:

$$\bar{V}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_{2i} \\ \rho_{3i} \\ \dots \\ \rho_{ni} \end{pmatrix} \text{ для всех } \lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Выполнив решение 10.12, получим матрицу собственных векторов:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \quad (10.13)$$

Определив частоты собственных колебаний и амплитудные коэффициенты (координаты собственных векторов), можно построить общее решение дифференциальных уравнений свободных колебаний.

Для системы с n степенями свободы общее решение можно записать в виде:

$$y_{ik} = \sum_{i=1}^k C_i A_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_{0i}), \quad (10.14)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Отсюда следует, что колебания с n степенями свободы носят сложный многочастотный характер. Каждой собственной частоте соответствует своя особая форма колебаний. Под формой колебаний понимают характер изогнутой оси стержня (стержневой системы). Колебания, соответствующие наименьшей частоте ω_1 , называются *колебаниями основного тона*, а остальные (в порядке возрастания частот) – *колебаниями второго, третьего и т. д. тонов* или *обертонов*.

При колебаниях системы с n степенями свободы отношения перемещений отдельных масс меняются с течением времени. Однако можно так подобрать начальные условия движения системы, при которых все массы системы будут колебаться с одинаковой частотой. *Колебания и соответствующие им формы, при которых все массы колеблются с одинаковой частотой, называются главными или нормальными.*

В главных формах колебаний отношения перемещений любых масс постоянны и не зависят от времени, т.е. для любого нормального колебания тона i отношение

$$\frac{y_{ki}}{y_{ri}} = \frac{A_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_{oi})}{A_{ri} \sin(\omega_i t + \varphi_{oi})} = \frac{A_{ki}}{A_{ri}} = \text{const.} \quad (10.15)$$

Форма упругой линии колеблющейся системы при нормальных колебаниях остается неизменной. Происходит лишь одинаковое изменение всех ординат (рис. 10.19).

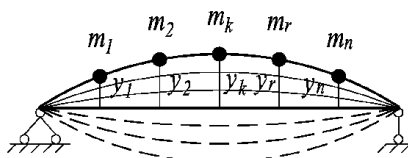


Рис. 10.19

Формы упругой линии, соответствующие нормальным колебаниям различных тонов, отличаются друг от друга числом полуволн. Наименьшее число полуволн соответствует форме колебаний основного тона. С переходом к каждому следующему числу полуволн увеличивается. Точнее, число экстремумов упругой линии увеличивается для каждого последующего тона на единицу. На рис. 10.20 приведены формы колебаний для простой и консольной балок.

Если для каждой из этих балок сложить изображенные формы колебаний, то получим новую более сложную форму, характеризующую колебательный процесс.

Таким образом, процесс свободных колебаний линейной системы с конечным числом степеней свободы может быть представлен как результат наложения нормальных колебаний различной частоты, число которых равно числу степеней свободы.

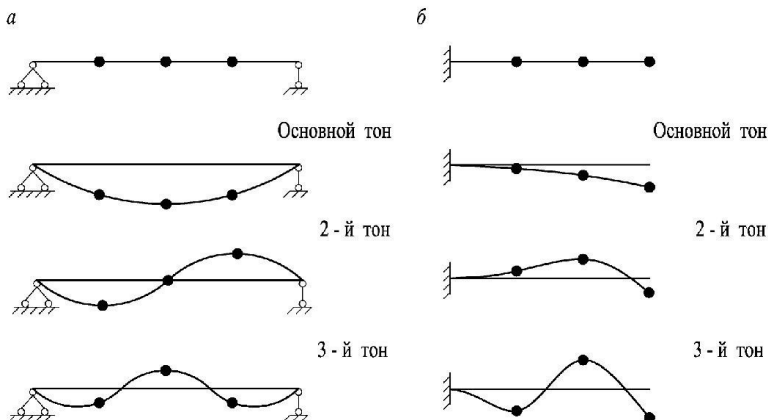


Рис. 10.20

Условия ортогональности главных форм колебаний

Рассмотрим две формы колебаний: i -ую (рис. 10.21, а) и k -ую (рис. 10.21, б) с частотами ω_i и ω_k .

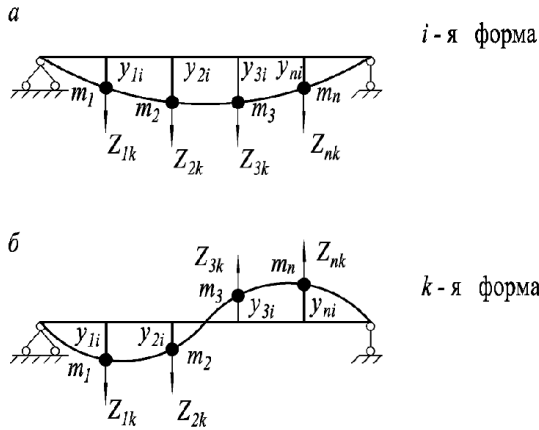


Рис. 10.21

Силы инерции масс m_1, m_2, \dots, m_n обозначим соответственно F_1, F_2, \dots, F_n . Перемещения этих масс — y_1, y_2, \dots, y_n .

Согласно теореме Бетти о взаимности работ внешних сил, можно записать:

$$\sum_{j=1}^n F_{ji} y_{jk} = \sum_{j=1}^n F_{jk} y_{ji}. \quad (10.16)$$

Перемещения и силы инерции масс будут:

а) для i -ой формы колебаний:

$$\begin{aligned} y_{ji} &= A_{ji} \sin(\omega_i t + \varphi_{oi}), \\ F_{ji} &= -m_j A_{ji} \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \varphi_o). \end{aligned} \quad (10.17)$$

б) для k -ой формы колебаний:

$$\begin{aligned} y_{jk} &= A_{jk} \sin(\omega_k t + \varphi_{ok}), \\ F_{jk} &= -m_j A_{jk} \omega_k^2 \sin(\omega_k t + \varphi_{ok}). \end{aligned} \quad (10.18)$$

Подставляя выражения (10.17), (10.18) в уравнение (10.16), получим:

$$\sum_{j=1}^n m_j A_{ji} A_{jk} \omega_i^2 = \sum_{j=1}^n m_j A_{ji} A_{jk} \omega_k^2,$$

или

$$(\omega_i^2 - \omega_k^2) \sum_{j=1}^n m_j A_{ji} A_{jk} = 0. \quad (10.19)$$

$$\text{Если } \omega_i \neq \omega_k, \text{ то } \sum_{j=1}^n m_j A_{ji} A_{jk} = 0. \quad (10.20)$$

Это равенство выражает свойство ортогональности двух различных форм колебаний.

На основании принципа возможных перемещений свойство ортогональности двух различных главных форм колебаний может быть выражено через внутренние усилия и для плоских систем будет иметь вид:

$$\sum \int \frac{N_i N_k}{EA} dx + \sum \int \frac{M_i M_k}{EI} dx + \sum \mu \int \frac{Q_i Q_k}{GA} dx = 0.$$

Итак, *возможная работа внешних или внутренних сил для одной из форм колебаний на перемещениях в другой форме колебаний всегда равна нулю.*

Знание форм собственных колебаний рассматриваемой системы может быть очень полезным при проектировании и расчете конструкций, работающих на динамическую нагрузку, так как позволяет заранее указать сечения, в которых можно ожидать наибольшие резонансные перемещения и расположить наиболее выгодно динамическую нагрузку на сооружении.

Для системы с неподвижными узлами в основных чертах форма собственных колебаний определяется расположением ее узлов, т. е. точек оси стержня, которые при колебаниях по этой форме остаются неподвижными.

Для стержневых систем с подвижными узлами нам неизвестны какие-либо общие теоремы, указывающие на качественный характер различных форм их собственных колебаний. Однако в ряде конкретных случаев, зная координаты собственных векторов, можно с достаточной для практических целей точностью представить себе, как должны выглядеть несколько первых форм собственных колебаний.

Пример 10.5

Определить частоты и главные формы собственных колебаний балки, изображенной на рис. 10.22. Балка выполнена из двутавра № 60, $I_z = 75450 \text{ см}^4$. На балке установлены три груза с массами $m_1 = 8 \text{ т}$, $m_2 = 12 \text{ т}$, $m_3 = 6 \text{ т}$. Проверить выполнение условия ортогональности двух главных форм колебаний.

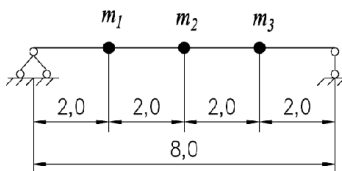


Рис. 10.22

1. Определяем степень свободы балки W_0 :

$W_0 = 3$, т.к. для закрепления масс необходимо ввести три линейных связи над массами.

2. Характеристическое уравнение при $W_0 = 3$, имеет вид:

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda) & \delta_{12}m_2 & \delta_{13}m_3 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda) & \delta_{23}m_3 \\ \delta_{31}m_1 & \delta_{32}m_2 & (\delta_{33}m_3 - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (10.21)$$

где $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$.

3. Определение перемещений от действия единичных сил, приложенных в направлении возможного перемещения масс m_1, m_2, m_3 .

Прикладываем поочередно единичные усилия в направлении возможного перемещения масс, строим эпюры изгибающих моментов M_1, M_2, M_3 от соответствующих загрузений (рис. 10.23).

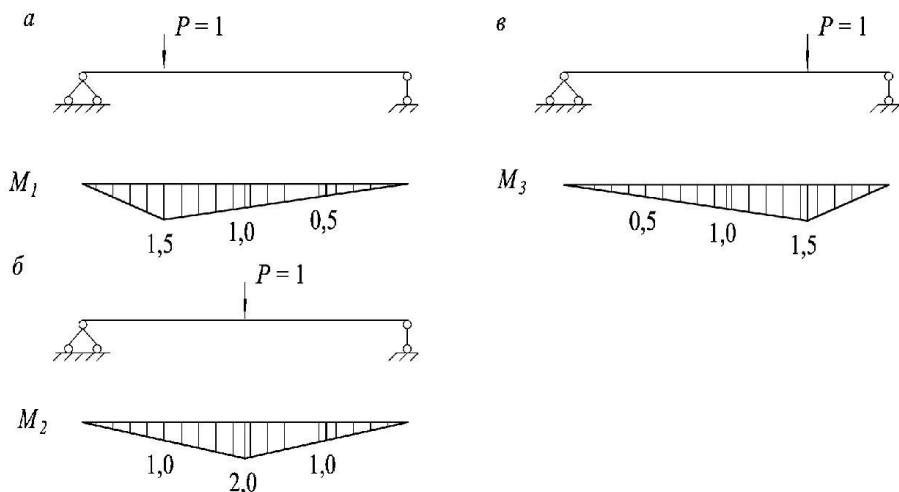


Рис. 10.23

Определяем перемещения δ_{ik} от действия единичных сил посредством интеграла Мора, пользуясь правилом Верещагина и формулой трапеций.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI_z} dx = \frac{0,5 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5}{EI_z} + \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5}{EI_z} = \frac{18}{3EI_z},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EI_z} dx = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EI_z} \cdot 2 = \frac{32}{3EI_z},$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{M_3^2}{EI_z} dx = \frac{0,5 \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5}{EI_z} + \frac{0,5 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5}{EI_z} = \frac{18}{3EI_z},$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI_z} dx = & \frac{2}{6EI_z} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1,5 \cdot 1,0 + 0 \cdot 1,0 + 1,5 \cdot 0) + \\ & + \frac{2}{6EI_z} (2 \cdot 1,5 \cdot 1,0 + 2 \cdot 1,0 \cdot 2,0 + 1,5 \cdot 2,0 + 1,0 \cdot 1,0) + \frac{4}{6EI_z} (2 \cdot 1,0 \cdot 2,0 + 2 \cdot 0 \cdot \\ & \times 0 + 1,0 \cdot 0 + 0 \cdot 2) = \frac{22}{3EI_z}, \end{aligned}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{M_1 M_3}{EI_z} dx = \frac{2}{6EI_z} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 0) + \\ + \frac{4}{6EI_z} (2 \cdot 1,5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 0,5) + \frac{2}{6EI_z} (2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 0 \times \\ \times 0 + 0,5 \cdot 0 + 0 \cdot 1,5) = \frac{14}{3EI_z},$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{M_2 M_3}{EI_z} dx = \frac{4}{6EI_z} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 0 \cdot 1,0 + 2,0 \cdot 0) + \\ + \frac{2}{6EI_z} (2 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 2 \cdot 1,0 \cdot 1,5 + 2,0 \cdot 1,5 + 1,0 \cdot 1,0) + \frac{2}{6EI_z} (2 \cdot 1,0 \cdot 1,5 + 2 \cdot 0 \times \\ \times 0 + 1,0 \cdot 0 + 0 \cdot 1,5) = \frac{22}{3EI_z}.$$

Подставляя в (10.21) значения перемещений δ_{ik} от единичных усилий, получим:

$$\begin{vmatrix} (8 \frac{18}{3EI_z g} - \lambda) & 12 \frac{22}{3EI_z g} & 6 \frac{14}{3EI_z g} \\ 8 \frac{22}{3EI_z g} & (12 \frac{32}{3EI_z g} - \lambda) & 6 \frac{22}{3EI_z g} \\ 8 \frac{14}{3EI_z} & 12 \frac{22}{3EI_z g} & (6 \frac{18}{3EI_z g} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (10.22)$$

Обозначим $K = \frac{3EI_z g}{4\omega^2}$, тогда уравнение (10.22) можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} 36 - K & 66 & 21 \\ 44 & 96 - K & 33 \\ 28 & 66 & 27 - K \end{vmatrix} = 0. \quad (10.23)$$

4. Определяем корни характеристического уравнения. Развертывая определитель (10.23), получаем характеристическое уравнение:

$$K^3 - 159K^2 + 1350K - 2016 = 0. \quad (10.24)$$

Решая кубическое уравнение (10.24), получим корни характеристического уравнения:

$$K_1 = 150,095; K_2 = 6,984; K_3 = 1,920.$$

Проверка правильности определения корней характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad & \sum_{i=1}^3 K_i = 159, \\ & \sum_{i=1}^3 K_i = 150,095 + 6,984 + 1,920 = 158,999 \approx 159. \\ \text{б) } \quad & \prod_{i=1}^3 K_i = 2016, \\ & \prod_{i=1}^3 K_i = 150,95 \cdot 6,984 \cdot 1,920 = 2012,666 \approx 2016. \end{aligned}$$

Погрешность мала.

5. Определяем частоты собственных колебаний из уравнения:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{3EI_z g}{4K_i}}. \quad (10.25)$$

Подставляя значения K_i , находим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 75450 \cdot 10^{-8} \cdot 9,81}{4 \cdot 150,095 \cdot 10^4}} = 27,87 \frac{1}{c};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 75450 \cdot 10^{-8} \cdot 9,81}{4 \cdot 6,984 \cdot 10^4}} = 129,2 \frac{1}{c};$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 75450 \cdot 10^{-8} \cdot 9,81}{4 \cdot 1,920 \cdot 10^4}} = 246,4 \frac{1}{c}.$$

6. Определяем координаты собственных векторов и строим главные формы колебаний.

Координаты собственного вектора, соответствующие 1-й частоте, находим из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (36 - 150,095) + 66\rho_{21} + 21\rho_{31} &= 0, \\ 44 + (96 - 150,095)\rho_{21} + 33\rho_{31} &= 0, \\ 28 + 66\rho_{21} + (27 - 150,095)\rho_{31} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

Решая систему (10.26), получим: $\rho_{11} = 1,000$; $\rho_{21} = 1,415$; $\rho_{31} = 0,986$.

Координаты собственного вектора, соответствующие 2-й частоте, находим из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (36 - 6,984) + 66\rho_{22} + 21\rho_{32} &= 0, \\ 44 + (96 - 6,984)\rho_{22} + 33\rho_{32} &= 0, \\ 28 + 66\rho_{22} + (27 - 6,984)\rho_{32} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

Решая систему (10.27), получим:

$$\rho_{12} = 1,000; \rho_{22} = -0,109; \rho_{32} = -1,040.$$

Координаты собственного вектора, соответствующие 3-й частоте, находим из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (36 - 1,920) + 66\rho_{23} + 21\rho_{33} &= 0, \\ 44 + (96 - 1,920)\rho_{23} + 33\rho_{33} &= 0, \\ 28 + 66\rho_{23} + (27 - 1,920)\rho_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

Решая систему (10.28), получим:

$$\rho_{13} = 1,000; \rho_{23} = -0,991; \rho_{33} = 1,494.$$

Матрица собственных векторов будет иметь вид:

$$V = \begin{vmatrix} 1,000 & 1,000 & 1,000 \\ 1,415 & -0,109 & -0,991 \\ 0,986 & -1,040 & 1,494 \end{vmatrix}. \quad (10.29)$$

Согласно вычисленным координатам собственных векторов (10.29), строим формы колебаний. Положительные значения совпадают с направлением перемещения колеблющейся массы (рис. 10.24).

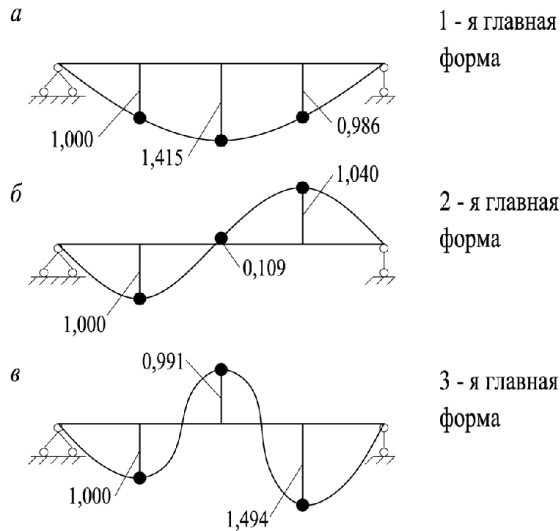


Рис. 10.24

7. Выполняем проверку условия ортогональности двух главных форм колебаний. Ввиду пропорциональности коэффициентов A_{ji} и A_{jk} коэффициентам ρ_{ji} и ρ_{jk} условие ортогональности (10.19) может быть записано в виде:

$$\sum_{j=1}^n m_j \rho_{ji} \rho_{jk} = 0. \quad (10.30)$$

Проверим выполнение этого условия для следующих форм колебаний:

а) первой и второй:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (8 \cdot 1,0 \cdot 1,0 - 12 \cdot 1,415 \cdot 0,109 - 6 \cdot 0,986 \cdot 1,040) = \\ = \frac{1}{g} (8,000 - 8,002) \approx 0. \end{aligned}$$

б) первой и третьей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (8 \cdot 1,0 \cdot 1,0 - 12 \cdot 1,415 \cdot 0,991 - 6 \cdot 0,986 \cdot 1,494) = \\ = \frac{1}{g} (16,838 - 16,827) \approx 0. \end{aligned}$$

в) второй и третьей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (8 \cdot 1,0 \cdot 1,0 - 12 \cdot 0,109 \cdot 0,991 - 6 \cdot 1,040 \cdot 1,494) = \\ = \frac{1}{g} (9,296 - 9,322) \approx 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условия ортогональности выполняются.

Пример 10.6

Определить частоту собственных колебаний рамы (рис. 10.25), на которой установлены грузы массой m_1 и m_2 , причем $m_1 = m_2$. Жесткость стоек – EI , а жесткость ригеля – $4EI$.

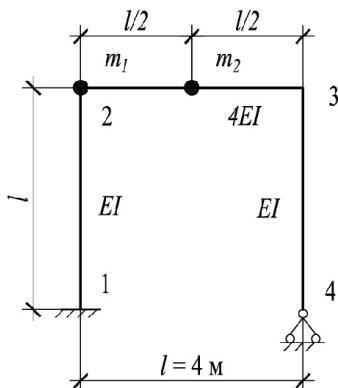


Рис. 10.25

Решение:

устанавливаем, что система статически неопределима. Для этого определяем наличие лишних связей. Рама имеет один контур $K = 1$, шарниров $\Pi = 1$.

$$n = 3K - \Pi = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Рама дважды статически неопределима, то есть имеет две лишние связи по методу сил, а при решении по методу перемещений рама трижды кинематически неопределима $K = K_1 + K_2 = 2 + 1 = 3$, число жестких узлов $K_1 = 2$, число линейных перемещений $K_2 = 1$.

Таким образом, для решения используем метод сил как наиболее рациональный. Раскрываем статическую неопределимость системы.

1. Выбираем основную систему метода сил (рис. 10.26, а). Она получена путем отбрасывания горизонтальной связи опоры 4 и введением шарнирной опоры в узле 1 (рис. 10.25). Эквивалентная система показана на рис. 10.26, б.

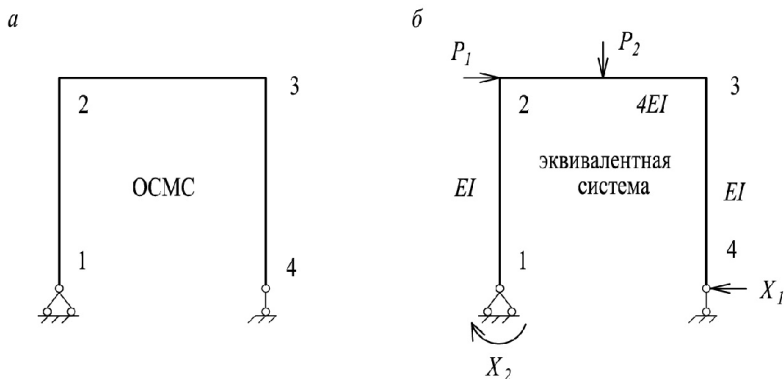


Рис. 10.26

2. Записываем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}^0 \cdot X_1 + \delta_{12}^0 \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0.$$

$$\delta_{21}^0 \cdot X_1 + \delta_{22}^0 \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Здесь коэффициенты δ_{ik}^0 представляют собой коэффициенты канонических уравнений метода сил. Они определяются при раскрытии статической неопределенности. В уравнения (10.11), (10.12) входят коэффициенты δ_{ik}^0 (без «0»), не имеющие отношения к уравнениям метода сил. Они представляют собой перемещения от единичных нагрузок в направлении перемещения колеблющихся масс.

3. Строим эпюры изгибающих моментов от единичных усилий $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ (рис. 10.27).

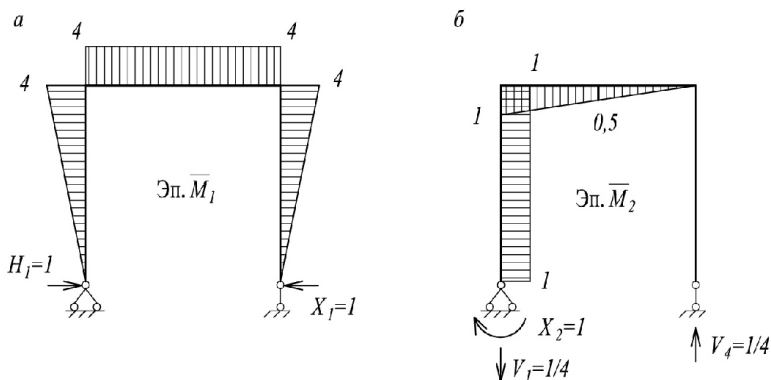


Рис. 10.27

4. Строим эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок, приложенных в направлении перемещения масс m_1 и m_2 (рис. 10.28).

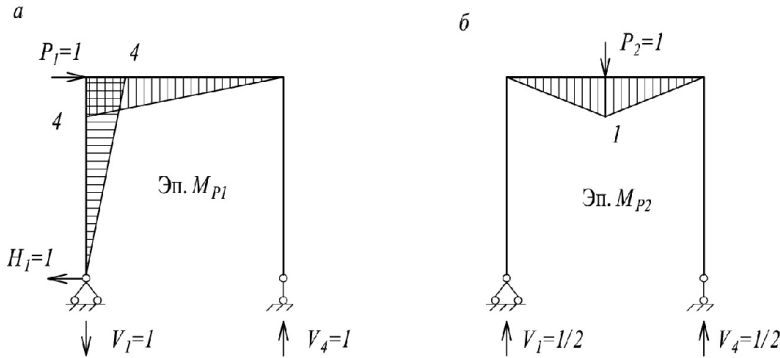


Рис. 10.28

5. Определяем единичные коэффициенты путем перемножения эпюр \overline{M}_1 и \overline{M}_2 по правилу Верещагина:

$$\delta_{11}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_1^2}{E \cdot I} dx = 2 \cdot \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{4 \cdot E \cdot I} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{176}{3 \cdot E \cdot I},$$

$$\delta_{22}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_2^2}{E \cdot I} dx = \frac{1 \cdot 4}{E \cdot I} \cdot 1 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot E \cdot I} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{E \cdot I} + \frac{1}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{13}{3 \cdot E \cdot I},$$

$$\delta_{12}^0 = \delta_{21}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{E \cdot I} dx = -\frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot E \cdot I} \cdot 0,5 = -\frac{8}{E \cdot I} - \frac{2}{E \cdot I} = -\frac{10}{E \cdot I}.$$

6. Определяем грузовые коэффициенты Δ_{ip} . Для этого перемножаем эпюры M_{pi} и \overline{M}_1 , M_{pi} и \overline{M}_2 .

От перемножения эпюры M_{p1} на \overline{M}_1 и \overline{M}_2 :

$$\Delta_{1p1} = \sum \int \frac{M_{p1} \overline{M}_1}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2 \cdot 4EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{64}{3EI} - \frac{8}{EI} = -\frac{88}{3EI}.$$

$$\Delta_{2p1} = \sum \int \frac{M_{p1} \overline{M}_2}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2 \cdot 4EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{EI} + \frac{4}{3EI} = \frac{28}{3EI}.$$

От перемножения эпюры M_{p2} на \overline{M}_1 и \overline{M}_2 :

$$\Delta_{1p2} = \sum \int \frac{M_{p2} \overline{M}_1}{EI} dx = -\frac{2}{EI}.$$

$$\Delta_{2p2} = \sum \int \frac{M_{p2} \overline{M}_2}{EI} dx = -\frac{1}{4EI}.$$

Для силы $P_1 = 1$ кН решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{176}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_1 - \frac{10}{E \cdot I} \cdot X_2 - \frac{88}{3 \cdot E \cdot I} &= 0, \\ -\frac{10}{E \cdot I} \cdot X_1 + \frac{13}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_2 + \frac{28}{3 \cdot E \cdot I} &= 0. \end{aligned}$$

Откуда: $X_1 = 0,221$ кН, $X_2 = -1,644$ кНм.

От силы $P_2 = 1$ кН.

$$\frac{176}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_1 - \frac{10}{E \cdot I} \cdot X_2 - \frac{2}{E \cdot I} = 0.$$

$$-\frac{10}{E \cdot I} \cdot X_1 + \frac{13}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_2 - \frac{1}{4 \cdot E \cdot I} = 0.$$

Откуда: $X_1 = 0,04$ кН, $X_2 = 0,037$ кНм.

7. Вычисляем в характерных сечениях значения действительных изгибающих моментов от единичных грузов колеблющихся масс по формуле:

$$M^{(x)} = M_P^{(x)} + \bar{M}_1^{(x)} \cdot X_1 + \bar{M}_2^{(x)} \cdot X_2. \quad (10.31)$$

По этим значениям строим эпюры моментов (рис. 10.29).

Эпюры M_1 и M_2 построены от действия горизонтальной силы P_1 и вертикальной P_2 , приложенных по направлению движения масс.

Эпюры можно получить любым из известных методов (методом перемещений, распределения моментов, комбинированным методом).

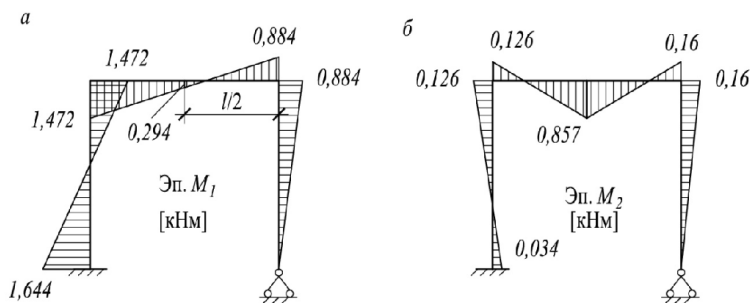


Рис. 10.29

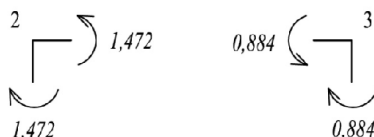
8. Выполняем проверки.

Деформационная проверка

Относительные перемещения по направлению отброшенной связи усилия X_1 и перерезанной связи момента X_2 должны быть равны нулю.

$$\sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx \cong 0; \quad \sum \int \frac{M_2 \bar{M}_1}{EI} dx \cong 0.$$

Статическая проверка: вырезанные из рамы внеопорные узлы должны находиться в равновесии. Например: для эпюры M_1 (рис. 10.29) узлы 2 и 3.



$$\begin{aligned} & \text{Узел 2} \\ & \sum M_{(2)} \cong 0 \\ & 1,472 - 1,472 \cong 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Узел 3} \\ & \sum M_{(3)} \cong 0 \\ & 0,884 - 0,884 \cong 0 \end{aligned}$$

9. Определяем число степеней свободы. Оно равно числу наложенных связей, ограничивающих линейное перемещение масс, т. е. необходимо ввести две связи I и II (рис. 10.30), $n = 2$.

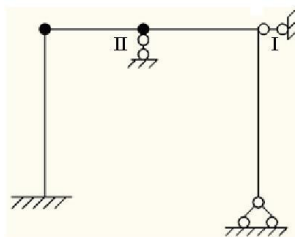


Рис. 10.30

Уравнение частот в форме метода сил имеет вид:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \delta_{11} \cdot m_1 - \lambda; & \delta_{12} \cdot m_1 \\ \delta_{21} \cdot m_1; & \delta_{22} \cdot m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10.32)$$

где $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$;

λ – характеристическое число,

ω – собственная частота;

$\delta_{11}, \delta_{12}, \dots$ – перемещения от действия единичных сил, приложенных в направлении возможного перемещения масс, или коэффициенты влияния.

10. Определяем коэффициенты влияния уравнения частот (10.32).

Для этого выбираем основную систему метода сил (рис. 10.31).

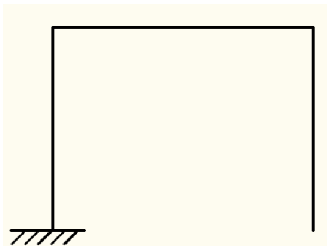


Рис. 10.31

Прикладываем в направлении искомого перемещения единичную силу (рис. 10.32). Строим эпюру от этой единичной силы и далее перемножаем эту эпюру с действительной эпюрой, полученной выше M_1 или M_2 .

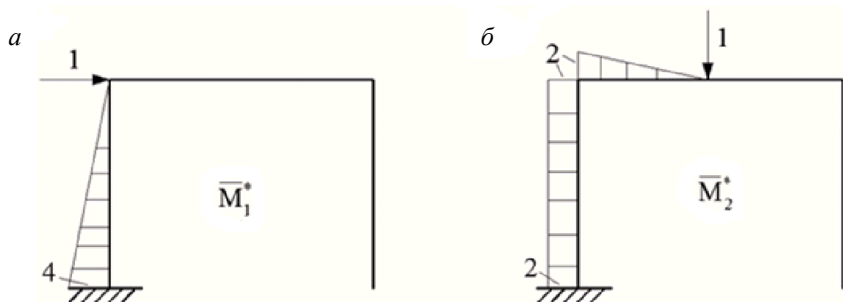


Рис. 10.32

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1^*}{EI} dx = \frac{4}{6EI} (2 \cdot 1,644 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 1,472 + 0 - 1,472 \cdot 4) = \frac{4,843}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_2 \bar{M}_1^*}{EI} dx = \frac{0,147}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 \bar{M}_2^*}{EI} dx = \frac{4}{6EI} (-2 \cdot 0,034 \cdot 2 + 2 \cdot 0,126 \cdot 2 + 0,126 \cdot 2 - 0,034 \cdot 2) + \frac{2}{6EI} (2 \cdot 0,126 \cdot 2 + 0 - 0,857 \cdot 2) = \frac{0,262}{EI};$$

$$\delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 \bar{M}_2^*}{EI} dx = \frac{0,155}{EI}.$$

Выполняем решение уравнения частот с учетом найденных коэффициентов.

$$\det(\omega) = \begin{vmatrix} \left(\frac{4,843}{E \cdot I} \cdot 2m - \lambda \right); & \frac{0,15}{E \cdot I} \cdot m \\ \frac{0,15}{E \cdot I} \cdot 2m; & \left(\frac{0,262}{E \cdot I} \cdot m - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель

$$\left(\frac{4,843}{E \cdot I} \cdot 2m - \lambda \right) \cdot \left(\frac{0,262}{E \cdot I} \cdot m - \lambda \right) - \frac{0,15}{E \cdot I} \cdot m \cdot \frac{0,15}{E \cdot I} \cdot 2m = 0.$$

Разделим на $\frac{m}{E \cdot I}$, получим

$$\left(4,843 \cdot 2 - \frac{\lambda \cdot E \cdot I}{m} \right) \cdot \left(0,262 \cdot 1 - \frac{\lambda \cdot E \cdot I}{m} \right) - 0,15 \cdot 0,15 \cdot 2 = 0.$$

Обозначим $K = \frac{\lambda \cdot E \cdot I}{m}$:

$$(9,686 - K) \cdot (0,262 - K) - 0,15 \cdot 0,3 = 0.$$

Откуда $K^2 - 9,948 \cdot K + 2,493 = 0$.

$$K_{1,2} = + \frac{9,948}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9,948}{2}\right)^2 - 2,493} = \frac{9,948}{2} \pm \sqrt{22,247} = 4,974 \pm 4,716.$$

$$K_1 = 9,691; K_2 = 0,257.$$

Выполняем проверку правильности определения корней характеристического уравнения.

$$\sum_{i=1}^n K_i = S_p \cdot A_*; \quad S_p \cdot A_* = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} \cdot m_i; \quad (10.33)$$

$$\sum_{i=1}^{n=2} K_i = K_1 + K_2 = 9,691 + 0,257 = 9,948;$$

Определяем след матрицы

$$\begin{vmatrix} (9,686 - K) & 0,15 \\ 0,3 & (0,262 - K) \end{vmatrix}. \quad (10.34)$$

$$S_p = 9,686 + 0,262 = 9,948.$$

Условия выполняются.

Проверка

Произведение корней характеристического уравнения должно равняться детерминанту матрицы A_* .

$$\prod_{i=1}^n K_i = \det(A_*), \quad (10.35)$$

$$\prod_{i=1}^{n=2} K_i = 9,691 \cdot 0,257 = 2,4986,$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 9,686 & 0,15 \\ 0,3 & 0,262 \end{vmatrix} = 9,686 \cdot 0,262 - 0,15 \cdot 0,3 = 2,493,$$

то есть условие (10.35) выполняется.

Определяем частоты собственных колебаний

$$K = \frac{\lambda \cdot E \cdot I}{m} = \frac{E \cdot I}{\omega^2 \cdot m};$$

откуда $\omega = \sqrt{\frac{E \cdot I}{K \cdot m}}.$

Подставив сюда корни K_1 и K_2 , получим

$$\omega = \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot 9,691}} = 0,321 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot 0,257}} = 1,972 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}}.$$

Определяем собственный вектор для частоты ω или K_1 . Координаты собственного вектора, соответствующие первой частоте, находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} (9,686 - K_1) \cdot 1 + 0,15 \cdot \rho_2^{(1)} = 0 \\ 0,30 \cdot 1 + (0,262 - K_1) \cdot \rho_2^{(1)} = 0 \end{cases} \text{ — эти уравнения получены из уравнений:}$$

$$\begin{cases} (\delta_{11} \cdot m_1 - \lambda) \cdot \bar{y}_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \bar{y}_2 = 0 \\ \delta_{21} \cdot m_1 \cdot \bar{y}_1 + (\delta_{22} \cdot m_2 - \lambda) \cdot \bar{y}_2 = 0 \end{cases}, \text{ разделим на } \bar{y}_1. \text{ Причем } \bar{y}_1 = 1, \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \rho_2^{(1)}.$$

С учетом этого и параметра K_1 имеем:

$$\begin{cases} (9,686 - 9,691) \cdot 1 + 0,15 \cdot \rho_2^{(1)} = 0 \\ 0,30 \cdot 1 + (0,262 - 9,691) \cdot \rho_2^{(1)} = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Из первого } \rho_2^{(1)} = \frac{9,686 - 9,691}{0,15} = 0,0333.$$

$$\text{Собственный вектор для первой частоты равен: } \bar{V}_{\omega_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,0333 \end{Bmatrix}.$$

Собственный вектор для второй частоты:

$$\begin{cases} (9,686 - 2,257) \cdot 1 + 0,15 \cdot \rho_2^{(2)} = 0 \\ 0,30 \cdot 1 + (0,262 - 0,257) \cdot \rho_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\rho_2^{(2)} = -\frac{9,686 - 0,267}{0,15} = -62,86.$$

$$\text{Собственный вектор для второй частоты равен: } \bar{V}_{\omega_2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -62,86 \end{Bmatrix}.$$

По собственным векторам строим формы колебаний.

На рис. 10.33, а представлена первая форма главных колебаний масс m_1 и m_2 , а на рис.10.33, б – вторая форма главных колебаний.

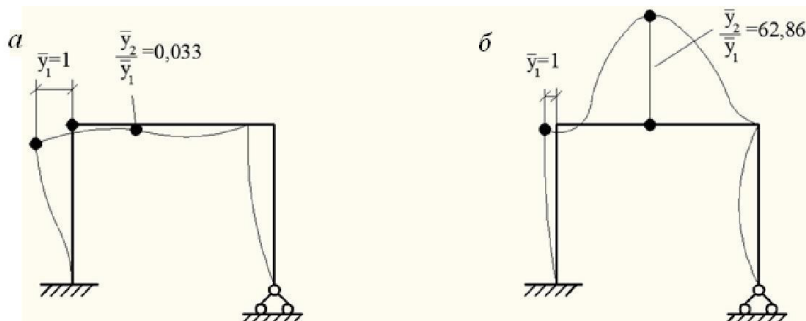


Рис. 10.33

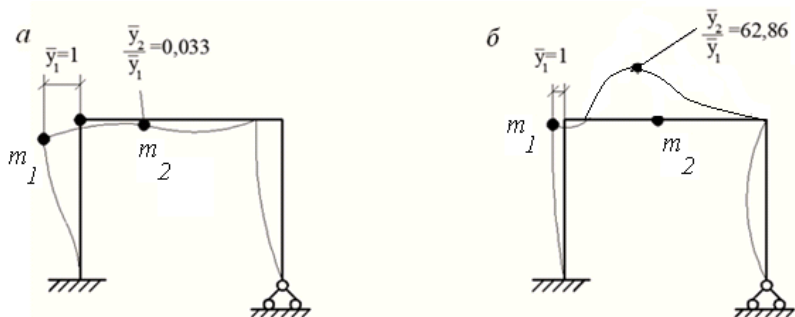


Рис. 10.33

Собственный вектор колебаний рамы равен:

$$\bar{V} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0,033 & -62,86 \end{Bmatrix}.$$

Проверка условия ортогональности двух главных форм колебаний.

Суть метода: возможная работа внешних или внутренних сил для одной из форм колебаний на перемещениях в другой форме колебаний всегда равно нулю.

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \rho_{ji} \cdot \rho_{jk} = 0.$$

$$2m \cdot 1 \cdot 1 - m \cdot 0,033 \cdot 62,86 = m(2 - 2,074) \approx 0..$$

$$\text{Погрешность: } \frac{2,074 - 2}{2} \cdot 100\% = 3,7\%.$$

Условие ортогональности выполняется в пределах точности расчета.

Пример 10.7

Раму (рис. 10.34, а) рассчитать на свободные колебания. Особенность этого примера состоит в том, что для раскрытия статической неопределимости рамы использован метод перемещений (МП). Размеры и жесткости стержней приведены на рисунке 10.34, а.

Динамическая степень свободы данной рамы $W_d = 2$, т. к. для закрепления масс необходимо ввести две линейные связи (рис. 10.34, б). Алгоритм расчета такой же, как в примере 10.5: раскрываем определитель $\det(\omega)$.

При $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$ определитель приобретает вид:

$$\det(\omega) = \begin{vmatrix} (2\delta_{11} m - \lambda) & \delta_{12} m \\ 2\delta_{21} m & (\delta_{22} m - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

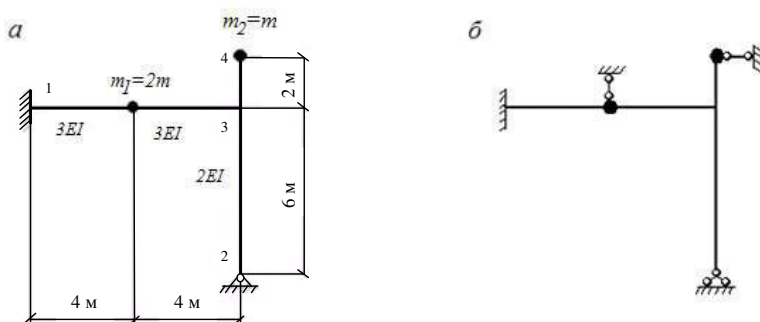


Рис. 10.34

Для вычисления коэффициентов определителя необходимо рассчитать раму на два воздействия (рис. 10.35, а, б).

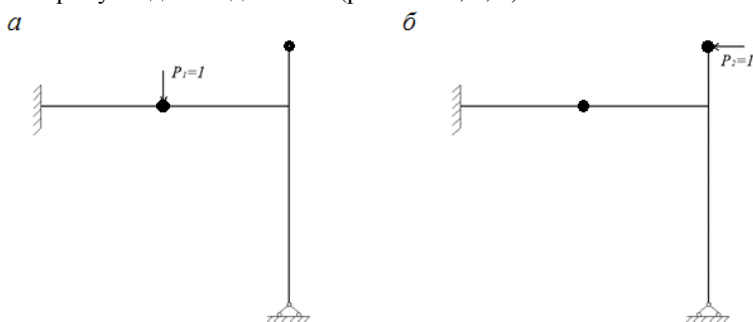


Рис. 10.35

При расчете заданной рамы рационален метод перемещений, т. к. степень кинематической неопределенности $K = K_1 + K_2 = 1 + 0 = 1$, а степень статической неопределенности $n = 2$. Каноническое уравнение МП при $K = 1$ имеет вид:

Основная система МП (ОСМП) и эпюра M_1 показаны на рис. 10.36, а, б.

— — —

Рис. 10.36

«Грузовая» эпюра $M_{P=1}$ изображена на рис. 10.37, а.

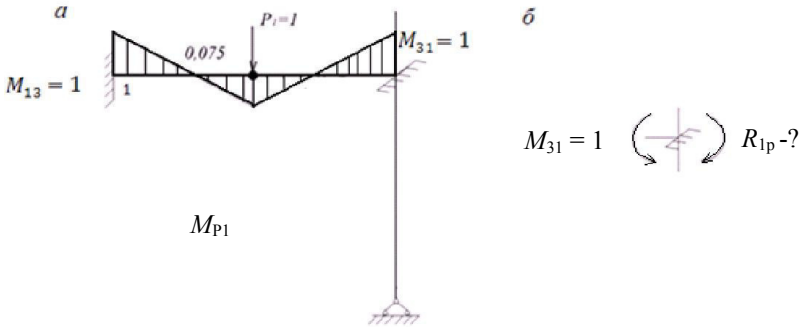


Рис. 10.37

$$M_{13} = M_{31} = \frac{Pl}{8} = \frac{1 \cdot 8}{8} = 1.$$

Значения этих моментов определены по табл. 8.2 МП (гл. 8, строка 2, при $a=b=l/2$). Тогда R_{1p} определится из равновесия узла 3 (рис. 10.36, б):

$$R_{1p} = -1.$$

После решения канонического уравнения

$$2,5EIZ_1 - 1 = 0$$

получаем

$$Z_1 = \frac{0,4}{EI}.$$

Результирующую эпюру получаем по формуле $M_1^{(к)} = M_{P=1}^{(к)} + M_1^{(к)}Z_1$, она изображена на рис. 10.38, а.

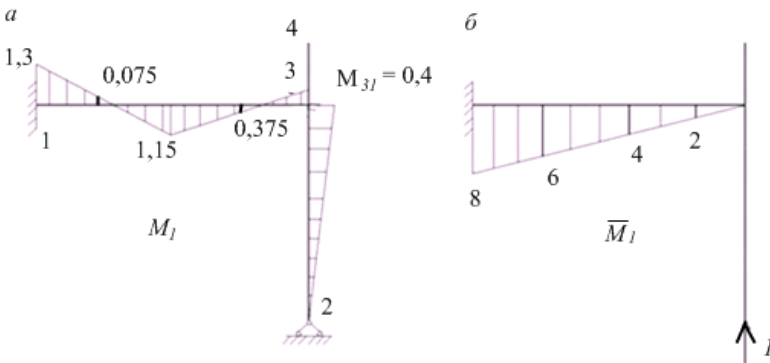


Рис. 10.38

Далее выполняется деформационная проверка, как в методе сил. Для этого строится эпюра изгибающих моментов для любой основной системы метода сил от единичного усилия, например, показанной на рис. 10.38, б.

Должно выполняться условие:

$$\sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx = 0 \pm 5 \%$$

$$\sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left[\frac{4}{6} (-8 \cdot 1,3 - 4 \cdot 0,075 \cdot 6 + 1,15 \cdot 4) + \frac{4}{6} (4 \cdot 1,15 + 4 \cdot 0,375 \cdot 2 + 0,4 \cdot 0) \right] = (2/9EI) (-10,4 - 1,8 + 4,6 + 4,6 + 3) = (2/9EI) (-12,2 + 12,2) = 0,$$

т. е. деформационная проверка выполняется. Здесь эпюры M_1 и \bar{M}_1 «перемножены» двумя участками на ригеле 1-3, длина каждого участка составляет 4 м, причем при перемножении использована формула Симпсона. Ордината посередине участка вычислена как средняя линия «перекрученной» трапеции.

Аналогично строится эпюра M_2 от нагрузки $P_2 = 1$. Коэффициент $r_{11} = 2,5EI$ взят из расчета рамы на первую нагрузку P_1 .

Уравнение МП имеет вид:

$$r_{11} Z_2 + R_{2p} = 0.$$

«Грузовая» эпюра M_{P2} от силы $P_2 = 1$, приложенной в направлении перемещения массы m_2 для основной системы, показана на рис. 10.39, б.

Коэффициент R_{2p} определен из равновесия узла 3 и показан на рис. 10.39, б.

Момент $M_{34} = P_2 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.

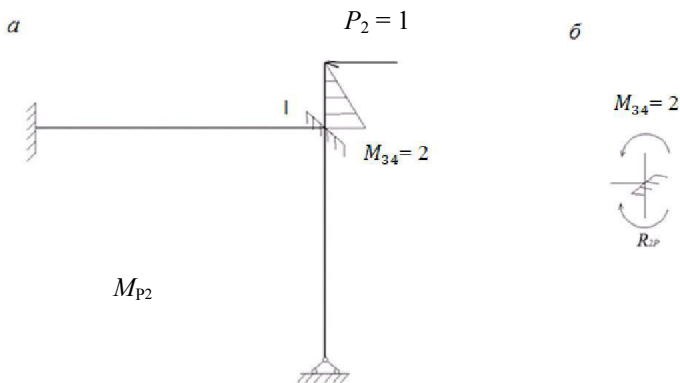


Рис. 10.39

Реактивное усилие $R_{2p} = M_{34} = -2$. Знак минус коэффициента R_{2p} показывает, что направление этого момента противоположно направлению r_{11} .

Каноническое уравнение приобретает вид

$$2,5EI Z_2 - 2 = 0; \quad Z_2 = \frac{0,8}{EI}.$$

Эпюру $M_2^{(к)} = M_{p2}^{(к)} + M_1^{(к)} Z_1$ строим аналогично эпюре M_1 (рис. 10.40).

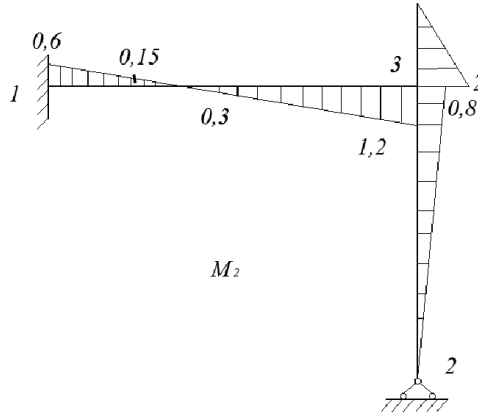


Рис. 10.40

Выполняем деформационную проверку эпюры M_2 по той же единичной эпюре \overline{M}_1 (рис. 10.38, б):

$$\sum \int \frac{M_2 \overline{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{8}{6} (-8 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,3 \cdot 4,0 + 0 \cdot 1,2) = \frac{4}{9EI} (-4,8 + 4,8) = 0,$$

т. е. деформационная проверка выполняется. Эпюры M_2 и \overline{M}_1 «перемножены» одним участком по формуле Симпсона, длина участка равна длине ригеля 1-3 – 8 м.

После построения эпюр M_1 и M_2 выполняется вычисление коэффициентов определителя $\det(\lambda)$ (10.7), так как эпюры M_1 и M_2 построены от единичных воздействий, то коэффициенты могут быть вычислены обычным образом:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx;$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EI} dx;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_2 M_1}{EI} dx.$$

Но для уменьшения количества участков при «перемножении» эпюр можно воспользоваться упрощающими эпюрами M_1^* и M_2^* (рис. 10.41, а, б).

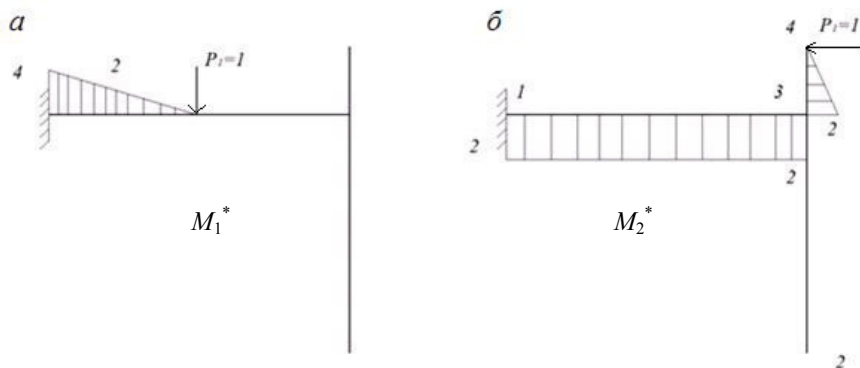


Рис. 10.41

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1^*}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{4}{6} (1,3 \cdot 4 + 4 \cdot 0,075 \cdot 2) = \frac{1,288}{EI},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 M_2^*}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 0,3 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1,6+1,33}{EI} = \frac{2,933}{EI}.$$

Здесь при «перемножении» эпюр M_2 и M_2^* на ригеле 1-3 использована формула Верещагина; на консоли 3-4 – формула «трапеций».

Следует подчеркнуть, что для вычисления коэффициентов $\delta_{12} = \delta_{21}$ нельзя использовать процедуру

$$\sum \int \frac{M_1^* M_2^*}{EI} dx.$$

Эти коэффициенты следует определять одним из приведенных способов:

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_2 M_1^*}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{4}{6} (4 \cdot 0,6 + 4 \cdot 2 \cdot 0,15) = \frac{0,8}{EI}$$

или

$$\delta_{21} = \sum \int \frac{M_2^* M_1}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot 2 \cdot 4 (-0,075) + \frac{1}{3EI} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0,375 = \frac{-0,2+1}{EI} = 0,8EI.$$

В последнем случае при «перемножении» эпюр M_2^* и M_1 использована непосредственно формула Верещагина, ординаты $y_c = 0,075$ и $0,375$ – это под центром тяжести эпюры M_2^* (рис. 10.38, 10.41).

Подставляем все коэффициенты в определитель $\det(\lambda)$:

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} \left(\frac{1,288 \cdot 2m}{EI} - \lambda \right) & \frac{0,8m}{EI} \\ \frac{0,8}{EI} \cdot 2m & \left(\frac{2,933 \cdot m}{EI} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Во избежание громоздких выражений вводим обозначение $K = \frac{\lambda EI}{m}$ и раскрываем определитель:

$$\det(\omega) = \begin{vmatrix} (2,576 - K) & 0,8 \\ 1,6 & (2,933 - K) \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получаем характеристическое уравнение и его корни K_1 и K_2 :

$$(2,576 - K) \cdot (2,933 - K) - 0,8 \cdot 1,6 = 0,$$

$$K^2 - 5,509K + 6,275 = 0,$$

$$K_1 = 3,8999 \approx 3,9; K_2 = 1,609.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получаем частоты свободных колебаний ω_1 и ω_2 :

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}; \quad \lambda = \frac{Km}{EI};$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{K_1 m}} = \sqrt{\frac{EI}{3,9 \cdot m}} = 0,506 \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{K_2 m}} = \sqrt{\frac{EI}{1,609 m}} = 0,788 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Колебания с n степенями свободы носят сложный характер. Однако можно подобрать начальные условия, при которых все массы системы будут колебаться с одинаковой частотой. Такие колебания и соответствующие им формы называются главными.

Из исходных уравнений колебаний определить амплитуды главных форм колебаний A_1 и A_2 не удается:

$$\begin{cases} (\delta_{12}m_1 - \lambda)A_1 + \delta_{12}m_2A_2 = 0 \\ \delta_{21}m_1A_1 + (\delta_{22}m_2 - \lambda)A_2 = 0 \end{cases}.$$

После вычисления и подстановки соответствующих величин система уравнений приобрела вид:

$$\begin{cases} (1,288 \cdot 2 - K)A_1 + 0,8 \cdot A_2 = 0 \\ 2 \cdot 0,8 \cdot A_1 + (2,933 - K)A_2 = 0 \end{cases}.$$

Но можно определить отношения этих амплитуд, приняв одно из них за 1,0. Определим эти отношения при двух частотах.

При первой частоте принято $A_1 = 1$ и найдено ρ_{21} .

$$(1,288 \cdot 2 - 3,90) \cdot 1 + 0,8\rho_{21}^{(1)} = 0$$

$$\rho_{21}^{(1)} = \frac{1,324}{0,8} = 1,655 - \text{при первой частоте.}$$

$$(1,288 \cdot 2 - 1,609) \cdot 1 + 0,8\rho_{21}^{(2)} = 0.$$

$$\rho_{21}^{(2)} = -\frac{0,967}{0,8} = -1,209 - \text{при второй частоте.}$$

Должно соблюдаться равенство на основе теоремы о взаимности работ:

$$2m \cdot 1 \cdot 1 = 1,655 \cdot 1,209m = 2m.$$

Приближенный характер главных форм колебаний показан на рис. 10.42, а, б.

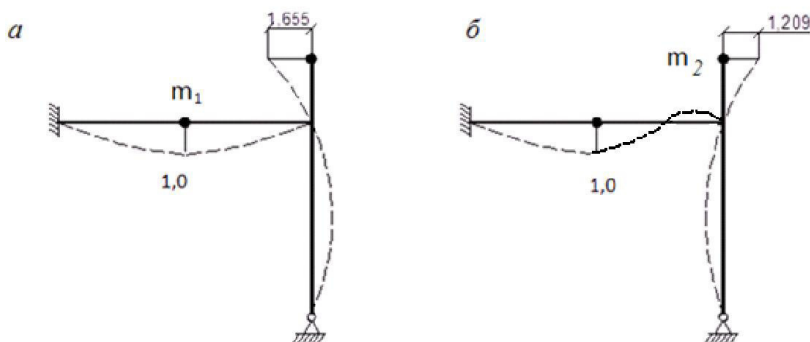


Рис. 10.42

Пример 10.8

В заданной раме (рис. 10.43, а) определить частоты свободных колебаний, если $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, жесткость ригеля $4EI$, а жесткость стоек – $2EI$ и $3EI$.

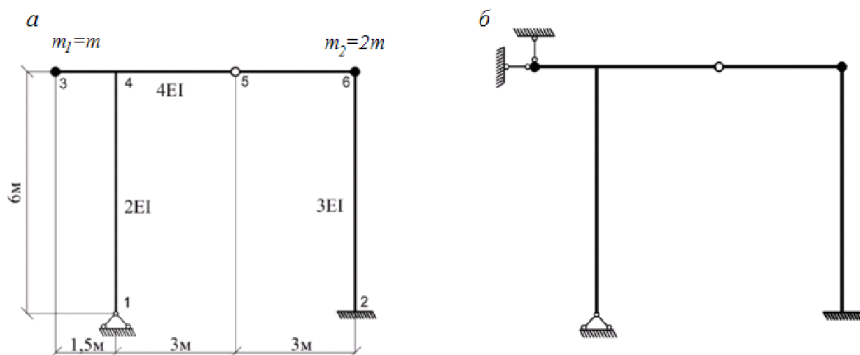


Рис. 10.43

Заданная рама имеет две степени свободы $W_d = 2$, т. к. для закрепления точечных масс необходимо ввести две линейные связи (рис. 10.43, б), причем в горизонтальном направлении имеем массу $m_1 + m_2 = 3m$, что учтено в определителе $\det(\lambda)$, который имеет вид:

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} (\delta_{11} - \lambda)m & \delta_{12} \cdot 3m \\ \delta_{21}m & (\delta_{22} \cdot 3m - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Для раскрытия определителя необходимо найти перемещения от действия единичных сил $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$, приложенных в направлении возможного перемещения масс (рис 10.44, а, б).

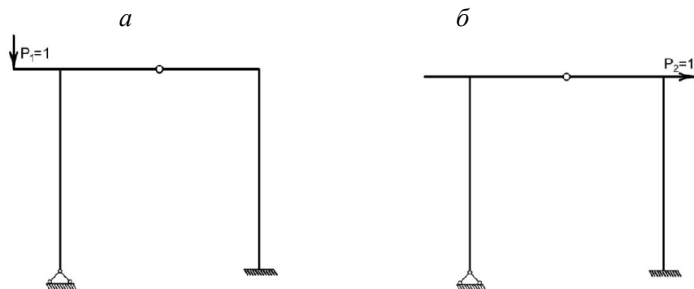


Рис. 10.44

Рама статически неопределима. Чтобы определить коэффициенты (перемещения) δ_{ik} определителя $\det(\lambda)$ (10.7) необходимо раскрыть статическую неопределимость рамы. Для этого рационально использовать метод сил, т. к. степень статической неопределимости

$$n = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 2 = 1,$$

а степень кинематической неопределимости

$$K = K_1 + K_2 = 2 + 2 = 4,$$

т. е. по методу перемещений рама неопределима 4 раза.

Выбираем основную систему метода сил (ОСМС), которую получаем путем врезания шарнира на опоре 2 (рис. 10.45, а). За неизвестное усилие X_1 принят момент в заделке 2 (рис. 10.37, б).

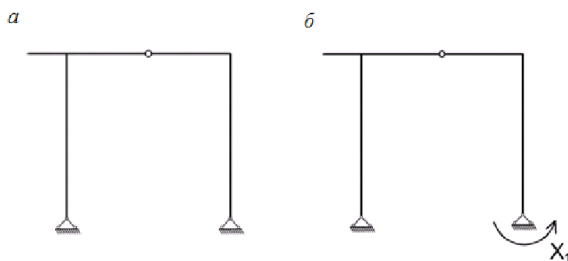


Рис. 10.45

Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11}^0 X_1 + \Delta_{1p}^0 = 0.$$

На рис. 10.46 приведена эпюра \bar{M}_1^0 от $X_1 = 1$. Для ее построения необходимо предварительно определить реакции опор трехшарнирной рамы.

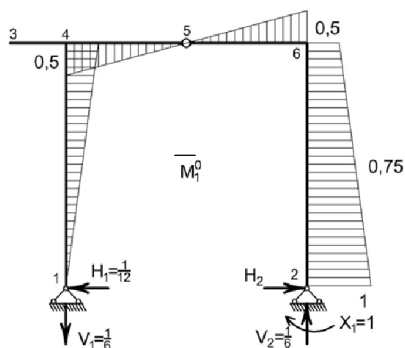


Рис. 10.46

Из условия равновесия для всей рамы

$$\sum M_2 = 0$$

получаем

$$V_1 \cdot 6 - 1 = 0, \text{ отсюда } V_1 = \frac{1}{6}.$$

Аналогично, из уравнения $\sum M_1 = 0$ определяем V_2 :

$$V_2 \cdot 6 - 1 = 0, \text{ отсюда } V_2 = \frac{1}{6}.$$

Из уравнения $\sum M_5^{\text{левых сил}} = 0$, определяем H_1 :

$$V_1 \cdot 3 - H_1 \cdot 6 = 0; H_1 = \frac{1}{12}; H_2 = \frac{1}{12}.$$

Строим грузовую эпюру M_{p1} от силы $P_1 = 1$, приложенной в направлении перемещения массы $m_1 = t$ (рис. 10.47).

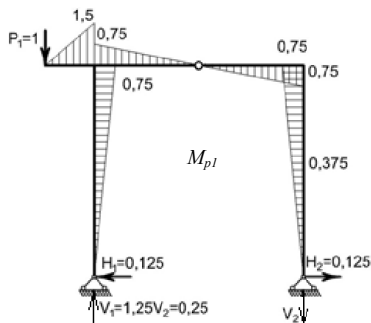


Рис. 10.47

Для ее построения необходимо также определить реакции опор в трехшарнирной раме. Далее определяем коэффициенты канонического уравнения метода сил.

$$\delta_{11}^0 = \sum \int \frac{\bar{M}_1^0 \cdot \bar{M}_1^0}{EI} dx.$$

$$\delta_{11}^0 = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} (0,5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (0,5 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,75 \cdot 0,75 + 1 \cdot 1) = \frac{1,542}{EI}.$$

$$\Delta_{1p1}^0 = \sum \int \frac{\bar{M}_1^0 M_{p1}}{EI} dx.$$

$$\Delta_{1p1}^0 = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot 2 \cdot 0,75 \cdot 0,5 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-0,75 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0 \cdot 0 - 0,75 \cdot 0,5) +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot (-0,5 \cdot 0,75 - 4 \cdot 0,375 \cdot 0,75) = -\frac{0,3125}{EI}.$$

Здесь и далее при «перемножении» прямолинейных участков эюр используется формула «трапеций» или формула Симпсона.

Решаем первое каноническое уравнение:

$$1,542 \cdot X_1 - 0,3125 = 0,$$

отсюда $X_1 = 0,203$.

После вычисления X_1 строится эюра M_1 (рис. 10.48), используя для вычисления формулу:

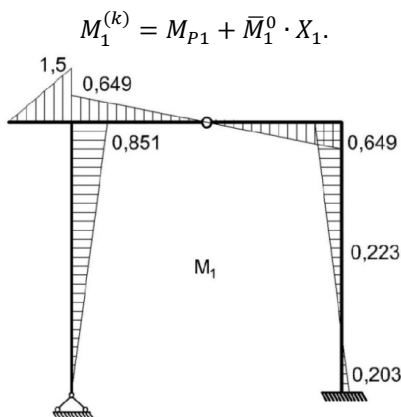


Рис. 10.48

Далее выполняется деформационная проверка эюры M_1 (аналогично, как в методе сил):

$$\sum \int \frac{M_1 \cdot \bar{M}_1^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 0,851 \cdot 0,5) + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-0,5 \cdot 0,649 - 0,5 \cdot$$

$$\cdot 0,649) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-0,649 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,223 \cdot 0,75 + 0,203 \cdot 1) =$$

$$= \frac{0,2632 - 0,2635}{EI} - \text{погрешность мала.}$$

Аналогичным образом строится эюра M_2 от силы $P_2 = 1$ приложенной в направлении перемещения массы $m_2 = m + 2m = 3m$ (рис. 10.49).

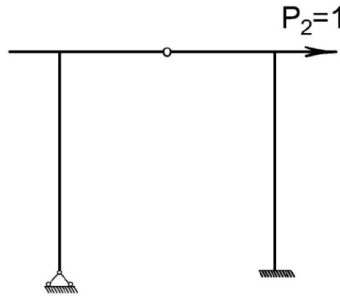


Рис. 10.49

При раскрытии статической неопределимости рамы в этом случае можно использовать ту же основную систему (рис. 10.45, а) и для решения, при нагружении $P_2 = 1$, можно воспользоваться коэффициентом δ_{11}^0 , полученным при первом нагружении рамы: $\delta_{11}^0 = \frac{1,542}{EI}$. Эпюра \bar{M}_1^0 представлена на рис. 10.50, а повторно для удобства перемножений.

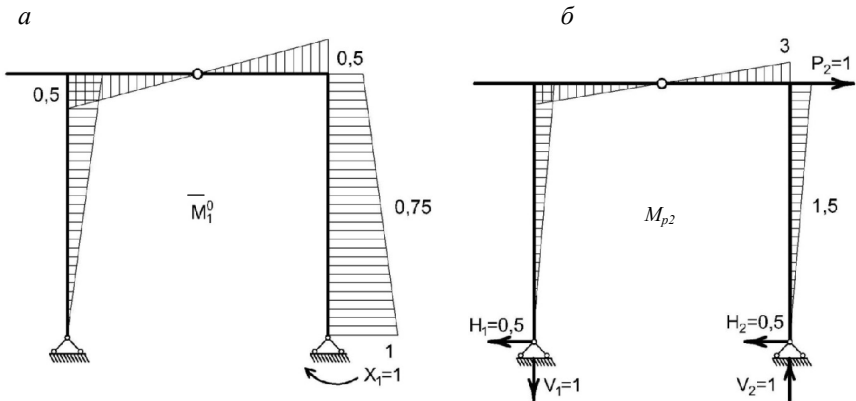


Рис. 10.50

«Грузовая» эпюра M_{p2} приведена на рис. 10.50, б, построенная после определения реакций опор в основной системе.

Каноническое уравнение имеет такой же вид:

$$\delta_{11}^0 X_2 + \Delta_{1p2}^0 = 0.$$

$$\Delta_{1p2}^0 = \sum \int \frac{\bar{M}_1^0 M_{p2}}{EI} dx = \frac{4,25}{EI}.$$

$$\frac{1,542}{EI} \cdot X_2 + \frac{4,25}{EI} = 0, \text{ откуда } X_2 = -2,756.$$

Значения моментов вычисляем по формуле:

$$M_2^{(k)} = M_{\text{рез}}^{(k)} = M_{p2} + \bar{M}_1^0 \cdot X_2.$$

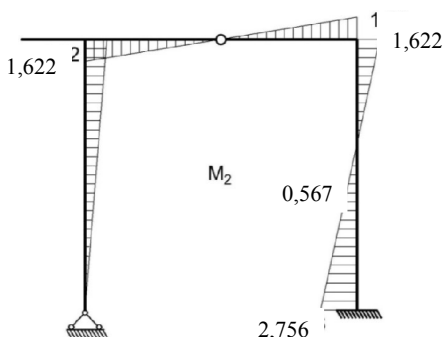


Рис. 10.51

Необходимо выполнить деформационную проверку эпюры M_2 (не приведена).

Имея эпюры M_1 и M_2 , можно приступить к раскрытию определителя:

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m - \lambda) & \delta_{12} \cdot 3m \\ \delta_{21}m & (\delta_{22}3m - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты определителя можно вычислять двумя путями:

Первый путь

Для этого необходимо перемножить эпюры M_1 и M_2 посредством интеграла Мора и используя правило Верещагина или формулы Симпсона.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{22} = \sum \int \frac{M_2^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx.$$

Второй путь.

Выбирается любая основная система метода сил (ОСМС) для заданной рамы, либо используется принятая при расчете (рис. 10.45, а), загружается единичной силой, приложенной в точке установки масс m_1 и m_2 , строится эпюра моментов \bar{M}_1^* от этого нагружения, затем эта эпюра перемножается с эпюрами M_1 и M_2 (рис. 10.48, 10.51).

При определении δ_{11} по второму пути использована эпюра \bar{M}_1^* , а для определения δ_{22} - \bar{M}_2^* (рис. 10.52, а, б). Эти эпюры построены при другой ОСМС, не принятой при построении эпюр M_1 , M_2 .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 \bar{M}_1^*}{EI} dx = \frac{1,437}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 \bar{M}_2^*}{EI} dx = \frac{7,7838}{EI} \approx \frac{7,784}{EI}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 \bar{M}_2^*}{EI} dx = \sum \int \frac{M_2 \bar{M}_1^*}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (4 \cdot 0,223 \cdot 3 - 6 \cdot 0,203) = \frac{0,892 - 0,406}{EI} = \frac{0,485}{EI}.$$

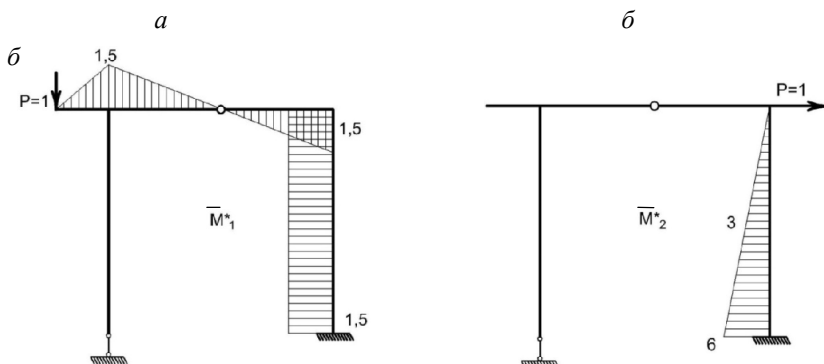


Рис. 10.52

Подставим полученные числа в определитель D :

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{1,437}{EI} m - \lambda \right) & \frac{0,485}{EI} \cdot 3m \\ \frac{0,485}{EI} \cdot m & \left(\frac{7,784}{EI} \cdot 3m - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы в уравнении не было громоздких выражений, введем обозначение:

$$K = \frac{\lambda EI}{m},$$

тогда определитель приобретает вид:

$$D = \begin{vmatrix} (1,437 - K) & 0,485 \cdot 3 \\ 0,485 & (7,784 \cdot 3 - K) \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя

$$(1,437 - K) \cdot (3 \cdot 7,784 - K) - 3 \cdot 0,485^2 = 0.$$

Получаем характеристическое уравнение:

$$K^2 - 24,789K + 32,851 = 0,$$

и его корни $-K_1 = 23,385$ и $K_2 = 1,405$.

Выполняется проверка корней:

1. Сумма корней $|K_1 + K_2| = |23,385 + 1,405| = |24,79| \approx |-24,789|$;
2. Произведение корней должно быть равно свободному члену уравнения:

$$K_1 \cdot K_2 = 23,385 \cdot 1,405 = 32,85 \approx 32,851.$$

Вернувшись к первоначальным обозначениям, получим две частоты свободных колебаний:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}; \quad K = \frac{\lambda EI}{m}; \quad \lambda = \frac{mK}{EI} = \frac{1}{\omega^2}, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{EI}{Km}}.$$

Подставив корни, имеем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{23,385 \cdot m}} = 0,206 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{1,405 \cdot m}} = 0,843 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

В этом виде расчета принято определять главные формы колебаний. Для этого вернемся к системе однородных уравнений, из которых получено вековое уравнение:

$$\begin{cases} (\delta_{11}m_1 - \lambda) \cdot A_1 + \delta_{12}m_2A_2 = 0, \\ \delta_{21}A_1 + (\delta_{22}m_2 - \lambda) \cdot A_2 = 0; \end{cases},$$

где A_1, A_2 – амплитуды свободных колебаний, которые неизвестны.

Поэтому определяют отношение этих амплитуд, приняв, например, $A_1 = 1$, и $\rho_{21} = \frac{A_2}{A_1}$, соответствующее каждой частоте.

При $K_1 = 1,405$, соответствующее 1-й частоте, получим:

$$(1,437 - 1,405) \cdot 1 + 0,485 \cdot 3 \cdot \rho_{21}^{(1)} = 0.$$

$$\rho_{21}^{(1)} = -\frac{0,032}{1,455} = -0,022.$$

При $K_2 = 23,385$, соответствующее 2-й частоте, имеем:

$$(1,437 - 23,385) \cdot 1 + 3 \cdot 0,485 \cdot \rho_{21}^{(2)} = 0,$$

$$\rho_{21}^{(2)} = \frac{21,948}{1,455} = 15,085.$$

Для проверки правильности расчета обычно определяют так называемую ортогональность главных форм колебаний, которая состоит в следующем:

$$m_1 \cdot 1 \cdot 1 - m_2 \cdot \rho_{21}^{(1)} \cdot \rho_{21}^{(2)} = 0,$$

$$m \cdot 1 \cdot 1 - 3m \cdot 15,085 \cdot 0,22 = m - 0,9956m \approx 0.$$

Примечание: в рассмотренном примере и других выше размерность нагрузок P_i и изгибающих моментов M_{pi} , действительных моментов M_i не приводится.

10.4. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы

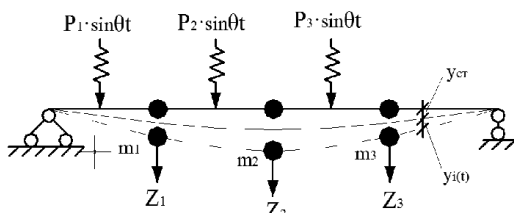


Рис. 10.53

Система уравнений, описывающая вынужденные колебания, имеет вид:

Обозначим $\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), и учитывая, что максимальные значения силы инерции имеют место, когда $\sin \theta t = 1$, уравнение (10.36) можно переписать:

где $\overline{Z}_i = m_i \theta^2 y_i$ – амплитудные значения силы инерции,

Δ_{ip} – перемещения в заданной системе от статического действия максимальных значений вибрационной нагрузки.

406

внешней вибрационной нагрузки, приложенной статически, любым из известных методов расчета статически неопределимых систем (методом сил, перемещений и др.). При расчете по методу сил необходимо найти коэффициенты:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EI_z} dx; \quad \Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_i}{EI_z} dx.$$

Каждое неизвестное \overline{Z}_i системы (10.37) может быть определено по формуле:

$$\overline{Z}_i = -\frac{D_i}{D};$$

где D – детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных.

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn}^* \end{vmatrix}, \quad (10.38)$$

D_i – детерминант, полученный из детерминанта (10.38) путем замены в нем i -го столбца столбцом, составленным из грузовых коэффициентов.

Решение системы уравнений (10.37) целесообразно производить на ЭВМ, методом Гаусса, Зейделя или любым другим.

Определив максимальные значения инерционных сил Z_i , можно определить в произвольной точке «к» заданной системы внутренние усилия и перемещения по формуле:

$$M_{(k)} = M_p^{(k)} + M_1^{(k)} \overline{Z}_1 + M_2^{(k)} \overline{Z}_2 + \dots \quad (10.39)$$

M_p – момент в заданной системе, вызванный статическим действием максимальных значений вибрационной нагрузки, M_i – момент в заданной системе от действия Z_i .

Амплитудное перемещение масс можно определить:

$$y_i = \Delta_k = \Delta_{ip} + \delta_{i1} \overline{Z}_1 + \delta_{i2} \overline{Z}_2 + \dots + \delta_{in} \overline{Z}_n. \quad \text{или} \quad y_i = \frac{\overline{Z}_i}{m_i \theta^2} = \sum \int \frac{\overline{M}_i M}{EI_z} dx,$$

т. е. посредством перемножения эпюр \overline{M}_i и M .

Здесь \overline{M}_i – эпюра изгибающих моментов для основной системы метода сил (статически определимая система эквивалентная заданной) от $Z_i = 1$.

M – эпюра изгибающих динамических моментов, полученная на основе уравнений (10.39).

Любое внутреннее усилие в произвольный момент времени будет определяться по формуле:

$$Z_i(t) = Z_i \cdot \sin \theta t, \quad (10.40)$$

Z_i – величина амплитудного значения усилия.

Если из элементов каждого столбца детерминанта D вынести $\frac{1}{m_i}$ за знак детерминанта, то получим:

$$D = \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_n} \begin{vmatrix} (\delta_{11} - \lambda) & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ \delta_{21} m_1 & (\delta_{22} m_2 - \lambda) & \dots & \delta_{2n} m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} m_1 & \delta_{n2} m_2 & \dots & (\delta_{nn} m_n - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (10.41)$$

где $\lambda = \frac{1}{\theta^2}$.

При совпадении частот θ и ω детерминант D обратится в ноль. При этом силы инерции становятся равными бесконечности, возникает резонанс.

При выполнении динамического расчета делается проверка. Эпюры изгибающих моментов, построенные от действия единичных сил $Z_i = 1$ и нагрузки в статически определимых и неопределимых системах, должны удовлетворять условиям равновесия, а для статически неопределимых систем должны соблюдаться условия деформационной проверки. При правильном построении окончательных эпюр динамических усилий (M , Q , N) для любой отсеченной части стержневой системы, находящейся под действием внешней нагрузки, сил инерции и внутренних усилий, приложенных в местах разреза, должны соблюдаться условия равновесия:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0.$$

Кроме того, должно выполняться равенство:

$$\bar{y}_i = \frac{\bar{Z}_i}{m_i \theta^2} = \sum \int \frac{M \bar{M}_i}{EI_z} dx,$$

где M – действительная величина динамических изгибающих моментов, M_i – изгибающие моменты от сил $Z_i = 1$ в любой статически определимой системе, эквивалентной заданной.

Пример 10.9

Для рамы построить эпюры изгибающих моментов от действия вибрационной нагрузки $P(t) = P \sin \theta t$ при известных $\theta = 0,8\omega$ и размерах стержней.

Порядок расчета

1. Раскрываем статическую неопределимость (см. пример 10.6).
2. Построение эпюр M_1 и M_2 (от единичных сил $P_1 = 1$, $P_2 = 1$).

Указанные эпюры получены в примере 10.6 при рассмотрении свободных колебаний (рис. 10.29).

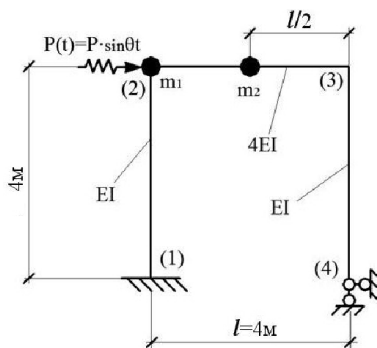


Рис. 10.54

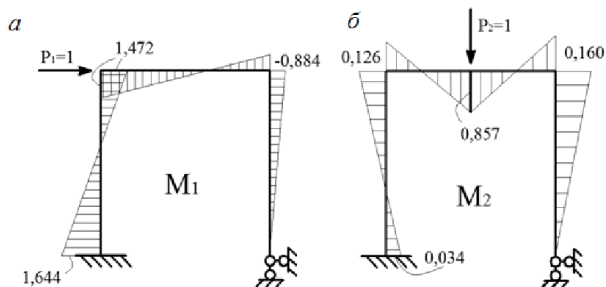


Рис. 10.55

3. Проверки статическая, деформационная эпюры M_1 , M_2 .
4. Определение частот собственных колебаний.

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (10.42)$$

где $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$.

δ_{ik} — перемещения от действия единичных сил в заданной системе, в направлении возможного перемещения масс.

Из (10.42) определяем:

$$\omega_1 = 0,321 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = 1,972 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

5. Определяем частоту возмущающей силы

$$\theta = 0,8\omega = 0,8 \cdot 0,321 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,257 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

6. Записываем динамическое уравнение. В форме метода сил они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* \bar{Z}_1 + \delta_{12} \bar{Z}_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} \bar{Z}_1 + \delta_{22}^* \bar{Z}_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10.43)$$

$$\text{Здесь } \delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2}; \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2};$$

$$\delta_{11}^* = \frac{4,843}{EI} - \frac{1}{2m \left(0,257 \sqrt{\frac{EI}{m}} \right)^2} = \frac{4,843}{EI} - \frac{1}{2 \cdot (0,257)^2 EI} = -\frac{2,727}{EI};$$

$$\delta_{11}^* = -\frac{2,727}{EI};$$

$$\delta_{22}^* = \frac{0,262}{EI} - \frac{1}{m (0,257)^2} \cdot \frac{m}{EI} = -\frac{14,878}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0,147}{EI} = 0,15 \frac{1}{EI}.$$

7. Определяем перемещения Δ_{1p} и Δ_{2p} в направлении колеблющихся масс m_1 и m_2 , которые представляют собой перемещения от амплитудных значений возмущающей силы P_t , т. е. от силы P .

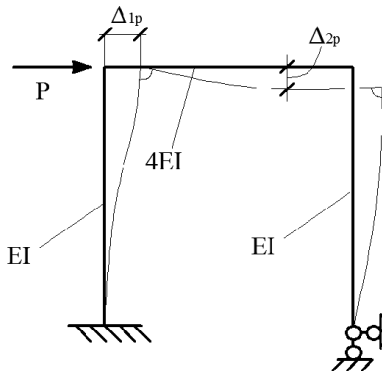


Рис. 10.56

Так как мы уже раскрывали статическую неопределимость такой системы при действии единичной силы от массы m_1 , приложенной в том же направлении, что и сила P , то воспользуемся готовой эпюрой M_1 (рис. 10.55), умножая ее значение на P (рис. 10.56).

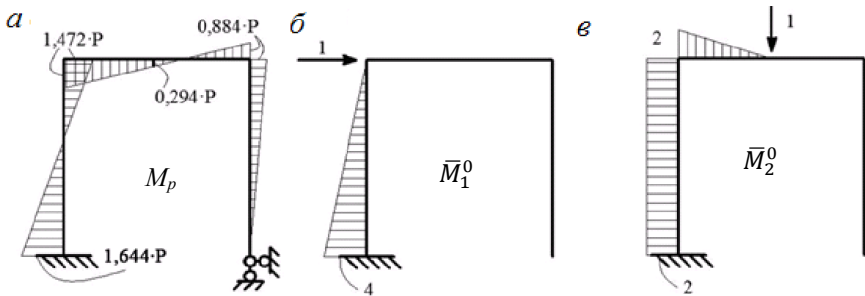


Рис. 10.57

Перемножая эпюры \bar{M}_p и \bar{M}_1^0 , построенные для основной системы метода сил, получим перемещения по направлению силы P_1 и силы P_2 :

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_1^0}{EI} dx = \frac{4}{6EI} (2 \cdot 1,644P \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 1,472P + 1,644P \cdot 0 - 1,472P \cdot 4) = \frac{4,843}{EI} P,$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_2^0}{EI} dx = \frac{4}{6EI} (2 \cdot 1,644P \cdot 2 - 2 \cdot 1,472P \cdot 2 - 1,472P \cdot 2 + 1,644P \cdot 2) + \frac{2}{6 \cdot 4EI} (-2 \cdot 1,472P \cdot 2 - 0,294P \cdot 2) = \frac{0,293}{EI} P.$$

8. Производим решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2,727}{EI} \bar{Z}_1 + \frac{0,15}{EI} \bar{Z}_2 + 4,843 \frac{P}{EI} = 0, \\ \frac{0,15}{EI} \bar{Z}_1 + \frac{14,278}{EI} \bar{Z}_2 + 0,293 \frac{P}{EI} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений после решения получаем силы инерции:

$$\bar{Z}_1 = 1,789P \quad \text{и} \quad \bar{Z}_2 = 0,0393P.$$

9. Определяем динамические моменты в произвольном сечении (K).

Для этого используем эпюры M_1 и M_2 (рис. 10.55):

$$M^{(k)} = M_p^{(k)} + \bar{M}_1^{(k)} \bar{Z}_1 + \bar{M}_2^{(k)} \bar{Z}_2.$$

Например:

$$M_{12} = 1,644P + 1,644 \cdot 1,789P - 0,034 \cdot 0,0393P = 4,584P.$$

Аналогично подсчитываем моменты в остальных сечениях и строим эпюру динамических моментов.

Примечание: излом на ригеле объясняется действием динамической инерционной силы.

10. Выполняем проверки:

10.1. Статическая проверка.

$$\sum X = -\frac{4,1 + 4,584}{4}P - \frac{2,414}{4}P + P + 1,789P = (-2,775 + 2,789)P = -0,013P = 0.$$

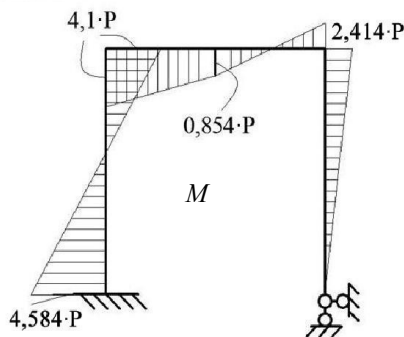


Рис. 10.58

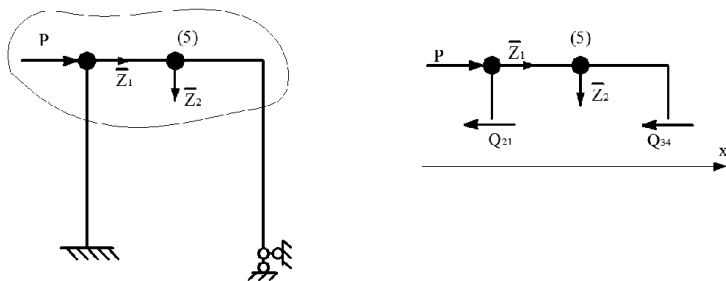


Рис. 10.59

Погрешность составляет около 0,5 %, что является допустимым.

10.2. Проверка в узле.

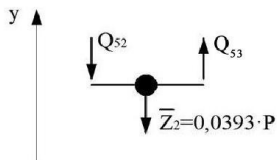


Рис. 10.60

$$\Sigma Y = -Q_{52} + Q_{53} + \bar{Z}_2 = \frac{-(4,1 - 0,854)}{2} P + \frac{0,854 + 2,414}{2} P - 0,0393P = -1,662P + 1,634P = 0,028P.$$

Погрешность незначительная (1,7 %).

11. По эпюре M строим эпюру Q , как обычно, для статически определимой системы по методике, изложенной ранее.

12. По эпюре Q строим эпюру продольных сил N так же, как в рамах, путем вырезания узлов и рассмотрения их равновесия.

13. Определяем перемещение в точке приложения i -ой массы. Для этого перемножаем эпюры \bar{M}_1^* и \bar{M}_2^* на эпюру M .

Для определения горизонтального перемещения первой массы m_1 перемножаем эпюру \bar{M}_1^0 с эпюрой M по способу Мора.

$$y_1 = \sum \int \frac{M \bar{M}_1^0}{EI} dx = \frac{4}{6EI} (2 \cdot 4,584P \cdot 4 - 4,1P \cdot 4) = \frac{13,312}{EI} P.$$

$$\text{С другой стороны } y_1 = \frac{\bar{Z}_1}{m_1 \theta^2} = \frac{1,789P}{2m \left(0,257 \sqrt{\frac{EI}{m}} \right)^2} = \frac{1,789P}{2 \cdot 0,06605EI} = \frac{13,55}{EI} P.$$

Расхождение незначительно (около 2 %).

Сопоставляя значения, видим, что равенство выполняется:

$$\sum \int \frac{M \bar{M}_1^0}{EI} dx = \frac{\bar{Z}_1}{m_1 \theta^2}.$$

10.5. Расчет рамы, нагруженной вибрационной нагрузкой, на вынужденные колебания

При расчете рамы, нагруженной вибрационной нагрузкой, расчет сводится к определению амплитудных значений инерционных сил. Ниже приводится такой расчет.

Пример 10.10

Раму, рассчитанную на свободные колебания (рис. 10.43) в примере 10.8, рассчитать на действие заданной вибрационной нагрузки (рис. 10.61):

$$P_t = P \cdot \sin \theta t \text{ (кН) и } q_t = q \cdot \sin \theta t \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}} \right).$$

Круговая частота возмущающих сил θ в расчете принята равной $\theta = 1,1 \cdot \omega_{\min}$ (послерезонансный режим).

Здесь: ω_{\min} – минимальная частота свободных колебаний, получена в предыдущем расчете:

$$\omega_{\min} = 0,206 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\text{тогда } \theta = 1,1 \cdot 0,206 \sqrt{\frac{EI}{m}} = 0,227 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Амплитудные значения возмущающей силы $P = 12$ кН, распределенной нагрузки $q = 4$ кН/м. Размеры рамы, жесткости элементов EI указаны на рис. 10.61.

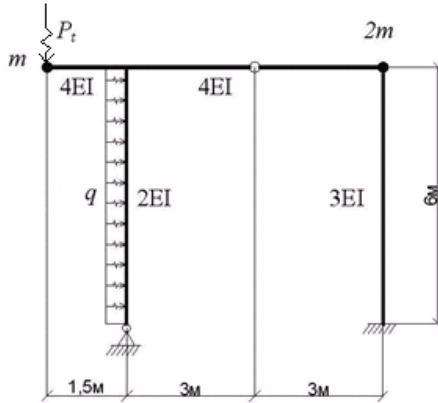


Рис. 10.61

Уравнение вынужденных колебаний при $W_d = 2$ имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* \cdot \bar{Z}_1 + \delta_{12} \cdot \bar{Z}_2 + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21} \cdot \bar{Z}_1 + \delta_{22}^* \cdot \bar{Z}_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \cdot \theta^2}, \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \cdot \theta^2},$$

где \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 – амплитудные значения инерционных сил; Δ_{1p}, Δ_{2p} – перемещения в заданной системе по направлению сил инерции.

Коэффициенты взяты из примера 10.8 (рис. 10.43).

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1,437}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{7,784}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0,485}{EI} \\ \delta_{11}^* &= \frac{1,437}{EI} - \frac{1}{m \cdot \left(0,227 \sqrt{\frac{EI}{m}}\right)^2} = \frac{1,437}{EI} - \frac{1}{0,0515EI} = \frac{1,437}{EI} - \frac{19,417}{EI} = -\frac{17,98}{EI}; \\ \delta_{22}^* &= \frac{7,784}{EI} - \frac{1}{3m \cdot \left(0,227 \sqrt{\frac{EI}{m}}\right)^2} = \frac{1,312}{EI}. \end{aligned}$$

Для определения свободных членов уравнений Δ_{1p}^0 и Δ_{2p}^0 необходимо построить эпюру M_p от амплитудных значений заданной нагрузки, а для этого необходимо раскрыть статическую неопределимость заданной рамы.

Каноническое уравнение при $n = 1$ имеет вид:

$$\delta_{11}^0 \cdot X_{11}^0 + \Delta_{1p}^0 = 0.$$

ОСМС, эпюра \overline{M}_1^0 и коэффициент $\delta_{11}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_1^0 \overline{M}_1^0}{EI} dx = 1,542/EI$ взяты из примера 10.8 (рис.10.45), и эпюра \overline{M}_1^0 приведена повторно на рис. 10.62, а.

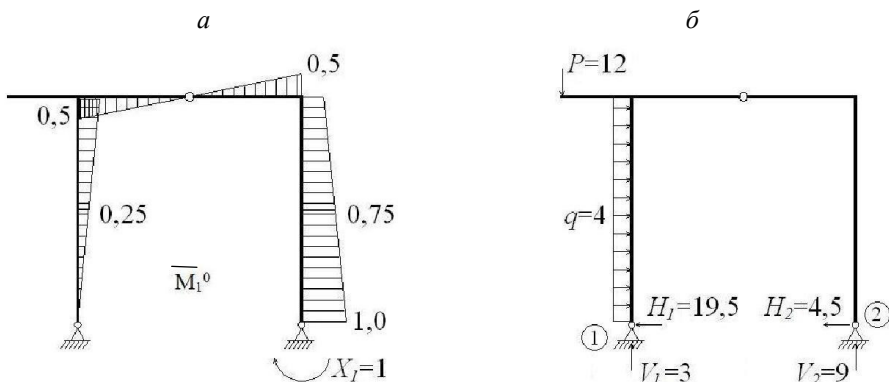


Рис. 10.62

На рис. 10.62, б показано нагружение ОСМС амплитудными значениями вибрационных сил и реакции опор 1, 2 от заданной нагрузки: V_1 , V_2 , H_1 , H_2 .

Эпюра M_p^0 от амплитудных значений этих сил приведена на рис.10.63, а.

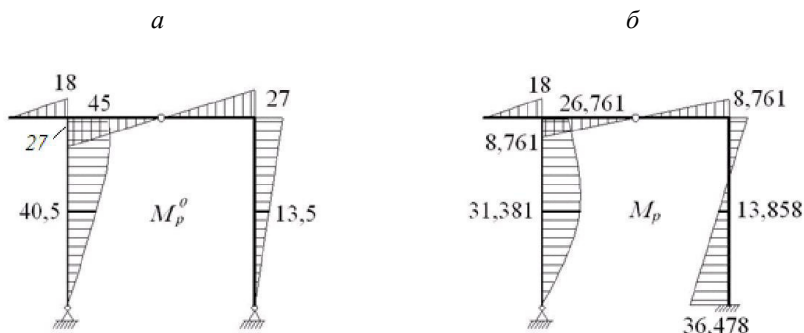


Рис. 10.63

$$\Delta_{1p}^0 = \sum \int \frac{\overline{M}_1^0 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (4 \cdot 0,25 \cdot 40,5 + 0,5 \cdot 45) + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (0,5 \cdot 27 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 27 \cdot 0,5) + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} (27 \cdot 0,5 + 4 \cdot 13,5 \cdot 0,75) = \frac{56,25}{EI}.$$

Из решения уравнения $1,542 \cdot X_1^0 + 56,25 = 0$ получаем $X_1^0 = -36,478$ кН.

Эпюра $M_p = M_p^0 + \overline{M}_1^0 X_1^0$ приведена на рис. 10.63, б.

Желательна деформационная проверка эпюры M_p :

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_p \bar{M}_1^0}{EI} dx &= \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} (26,76 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,25 \cdot 31,381) + \\ &+ \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} (0,5 \cdot 8,761 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 0,5 \cdot 8,761) + \\ &+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} (8,761 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,75 \cdot 13,858 - 1 \cdot 36,478) = \frac{24,55 - 24,537}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Далее переходим к определению свободных членов динамических уравнений Δ_{1p} и Δ_{2p} . Они могут быть вычислены по эпюрам M_1 и M_2 :

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 M_p}{EI} dx; \text{ и } \Delta_{2p} = \sum \int \frac{M_2 M_p}{EI} dx.$$

Но также можно воспользоваться упрощающими эпюрами \bar{M}_1^* и \bar{M}_2^* .

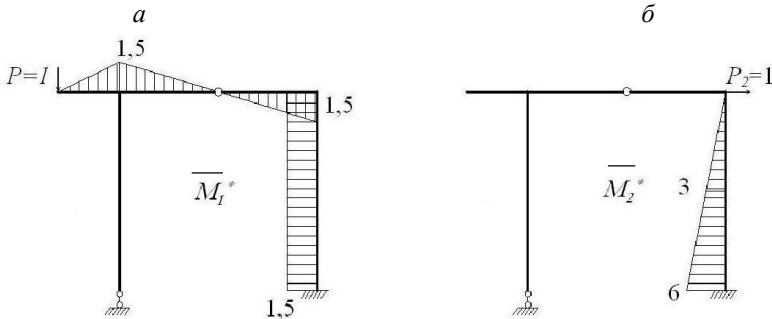


Рис. 10.64

Напоминаем, что для определения перемещений в статически неопределимых системах после раскрытия статической неопределимости единичные эпюры можно строить в любой статически определимой системе, полученной из заданной. Здесь для построения эпюр \bar{M}_1^* и \bar{M}_2^* использована другая основная система, чем была принята при построении M_p .

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_1^*}{EI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1,5}{6} \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 18 + \\ &+ \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} (-1,5 \cdot 8,761 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 8,761 \cdot 1,5) + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 1,5 \cdot 13,858 = \frac{38,379}{EI}; \\ \Delta_{2p} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2^* M_p}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} (36,478 \cdot 6 + 4 \cdot 13,858 \cdot 3) = \frac{128,388}{EI}. \end{aligned}$$

После вычисления всех членов динамического уравнения и сокращения на EI имеем:

$$\begin{cases} -17,98 \bar{Z}_1 + 0,485 \bar{Z}_2 + 38,379 = 0 \\ 0,485 \bar{Z}_1 + 1,312 \bar{Z}_2 + 128,388 = 0 \end{cases}.$$

После решения системы получаем:

$$\bar{Z}_1 = -0,500 \text{ кН}, \quad \bar{Z}_2 = -97,67 \text{ кН}.$$

Эпюру динамических моментов M_d строим обычным образом:

$$M_d = M_p + M_1 \bar{Z}_1 + M_2 \bar{Z}_2.$$

Эпюра амплитудных значений динамических моментов приведена на рис. 10.65.

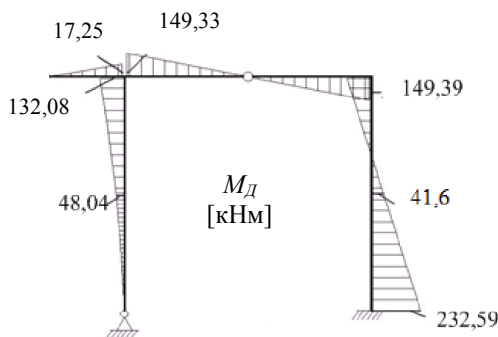


Рис. 10.65

Проверки:

а) Для деформационной проверки эпюры M_d основная система метода сил получена путем отбрасывания горизонтальной связи и представляет собой составную раму, состоящую из второстепенной 1-4-5 и главной 5-6-2. Эпюра M_2^0 представлена на рис. 10.66.

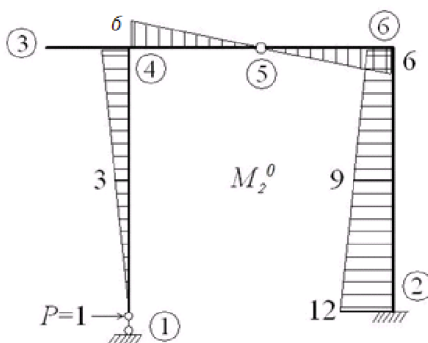


Рис. 10.66

Путем перемножения эпюр M_d и M_2^0 получаем:

$$\begin{aligned} \sum \frac{M_d \cdot M_2^0}{EI} dx &= \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} (6 \cdot 132,08 + 4 \cdot 3 \cdot 48,04) + \\ &+ \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} (6 \cdot 149,33 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 149,33) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} (149,33 \cdot 6 - 4 \cdot 9 \cdot 41,63 - 12 \cdot 232,59) = \frac{1132,47 - 1131,26}{EI} = \frac{1,21}{EI},$$

погрешность мала, меньше 0,5 %.

Последней процедурой определяется горизонтальное перемещение в опоре 1 в заданной системе, которое изначально равно 0, т. к. эта опора неподвижна (рис. 10.61).

б) Выполняем статическую проверку, рассматривая равновесие ригеля 3-4-5-6 с учетом силы инерции $Z_2 = 97,67$ кН (рис. 10.67).

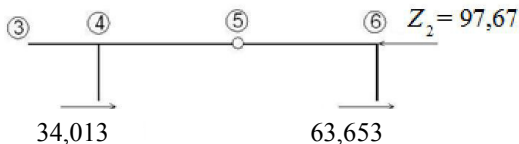


Рис. 10.67

Поперечные силы определены методом вырезания стержней из эпюры M_d (рис. 10.65):

$$Q_{26} = \frac{149,33 + 232,59}{6} = 63,653,$$

$$Q_{14} = \frac{132,08}{6} + \frac{4 \cdot 6}{2} = 34,013$$

$$\sum X = 34,013 + 63,653 - 97,67 = -0,004 \approx 0.$$

в) Определяем амплитудные перемещения масс двумя способами:

первый способ – по известной формуле:

$$y_i = \frac{\bar{Z}_i}{m_i \theta^2},$$

где \bar{Z}_i – амплитудные значения инерционных сил.

$$y_1 = \frac{\bar{Z}_1}{m_1 \theta^2} = \frac{0,500}{EI \cdot 0,0515} = \frac{9,708}{EI},$$

где $\theta^2 = (0,227 \sqrt{\frac{EI}{m_1}})^2 = 0,0515 \frac{EI}{m_1}$.

По второму способу это же перемещение определяем путем перемножения динамической эпюры M_d (рис. 10.65) с единичной эпюрой \bar{M}_1^* (рис. 10.64, а). Для удобства эта эпюра приведена повторно на рис. 10.68.

$$y_1 = \sum \int \frac{M_d \bar{M}_1^*}{EI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1,5}{6} (2 \cdot 1,5 \cdot 17,25) + \\ + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{6}{6} (149,33 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 1,5 \cdot 149,33) + \frac{1}{3EI} \cdot 1,5 \cdot 6 (-41,6) = \frac{-9,569}{EI}.$$

Знак «-» означает, что перемещение массы при колебаниях не совпадает с направлением силы.

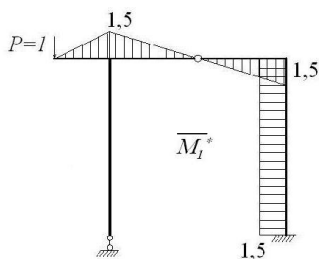


Рис. 10.68

По первому способу имеем $y_1 = \frac{9,708}{EI}$, по второму – $y_1 = \frac{9,569}{EI}$, т. е. погрешность мала.

Аналогичную проверку проделаем с амплитудным перемещением второй массы y_2 . По первому способу:

$$y_2 = \frac{Z_2}{3m\theta^2} = \frac{97,67}{3 \cdot 0,0515EI} = \frac{632,17}{EI}.$$

Здесь учтено, что во втором направлении имеются три массы $(m + 2m)$.

Для второго способа выберем эпюру \bar{M}_2^* . Эта эпюра повторно приведена на рис. 10.69.

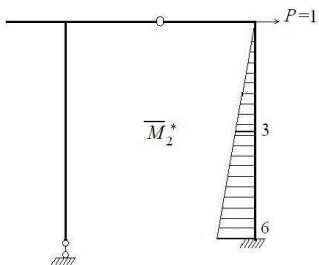


Рис. 10.69

$$\sum \int \frac{\bar{M}_2^* M_d}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{6}{6} (-4 \cdot 3 \cdot 41,6 - 6 \cdot 232,59) = -\frac{631,58}{EI}.$$

Сравнивая полученные значения $\frac{632,17}{EI}$ и $\frac{631,58}{EI}$, видим, что погрешность мала.

Примечание: в этой главе все примеры динамического расчета выполнены в так называемой форме метода сил. Однако динамические расчеты могут быть выполнены другим способом – в форме метода перемещений. Форма метода перемещений в динамических задачах рациональна при большой степени статической неопределимости упругой системы. В данном пособии этот способ не рассматривается.

11. ОСНОВЫ РАСЧЕТА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В связи с широким применением вычислительной техники стало возможным существенно повысить точность расчета различных плоских и пространственных конструкций с учетом взаимного влияния всех элементов. Вместе с тем в строительной практике появились новые конструктивные решения, содержащие большое число взаимно связанных элементов, например структурные системы. Нашли широкое применение системы, состоящие из пластин, к числу которых относятся крупнопанельные жилые и промышленные здания, а также зрелищные и спортивные сооружения.

За последние годы появился новый метод расчета сложных систем, получивший название метода конечных элементов (МКЭ), который успешно реализуется с применением ЭВМ.

По этому методу система разбивается на отдельные части (элементы) конечных размеров такой формы, которая доступна для предварительного исследования их напряженно-деформированного состояния (НДС). Чем больше число конечных элементов, тем точнее расчет.

В стержневых системах (рис.11.1) конечными элементами будут отдельные стержни или их участки.

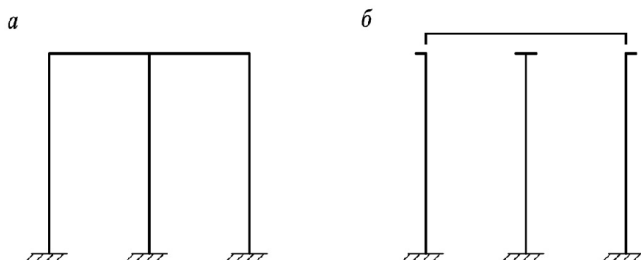


Рис.11.1

Перемещения и напряжения в отдельных стержнях вычисляются по известным формулам сопротивления материалов и строительной механики. Сопряжение элементов осуществляется путем удовлетворения условий равновесия и совместности деформаций и перемещений.

В соответствии с тем, какие величины принимаются за неизвестные, различают три классических метода решения: в форме метода сил, метода перемещений и смешанный метод.

В дальнейшем будем рассматривать метод конечных элементов в форме метода перемещений, когда за неизвестные принимаются угловые и линейные

смещения узлов рамы. В этом случае конечным элементом является стержень, у которого оба конца зашкелены, стержень, у которого один конец зашкелен, другой шарнирно оперт и другие типы элементов.

Метод конечных элементов является наиболее универсальным из существующих методов строительной механики, характеризуется логической четкостью и ясностью, что облегчает общение человека с ПК при автоматизированном счете.

11.1. Краткое описание метода конечных элементов

Плоская рама разбивается на конечные элементы в виде стержней, соединенных в узлах и нагруженных по концам силами взаимодействия \bar{F}_r , где индекс r обозначает номер элемента, а черточка сверху – местную систему координат для одного стержня, когда ось X_r совпадает с осью стержня. Такая система необходима для ориентации внешней нагрузки и внутренних силовых факторов по концам стержней.

Местоположение элемента в общей системе координат X, Y фиксируется двумя узлами (i, k , где i – начало элемента), ориентировка его может быть различной (горизонтальной или наклонной, определяемой углом α , рис. 11.2).

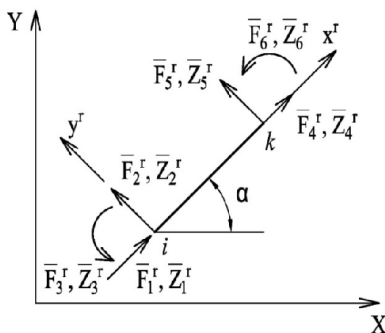


Рис.11.2

Здесь \bar{F}_1^r и \bar{F}_4^r – продольные силы, прикладываемые к стержню под номером r . За положительное значение принимается направление вектора от узла;

\bar{F}_2^r и \bar{F}_5^r – поперечные силы по концам стержня; считаются положительными, если направление их векторов совпадает с осью элемента y^r ;

\bar{F}_3^r и \bar{F}_6^r – изгибающие моменты по концам стержня, за положительное значение принимается действие момента против часовой стрелки;

\bar{Z}_i^r и \bar{Z}_k^r – векторы узловых перемещений.

В соответствии с методом перемещений силы взаимодействия \bar{F}^r по концам стержней связаны с их перемещениями \bar{Z}^r соотношением

$$\bar{F}^r = \bar{R}^r \cdot \bar{Z}^r, \quad (11.1)$$

где \bar{R}^r – матрица жесткости элемента в местной системе координат (каждый компонент матрицы представляет собой усилие по концам стержня от единичного смещения его концов).

В случае элемента с жесткими узлами по концам имеем

$$\bar{F}^r = [\bar{F}_1^r, \bar{F}_2^r, \dots, \bar{F}_6^r]^T, \quad (11.2)$$

$$\bar{Z}^r = [\bar{Z}_1^r, \bar{Z}_2^r, \dots, \bar{Z}_6^r]^T, \quad (11.3)$$

где индекс «T» обозначает операцию транспонирования.

Матрицы угловых сил и перемещений, а также матрицы жесткостей элемента преобразуются из местных систем в общую систему координат X, Y (рис. 11.3).

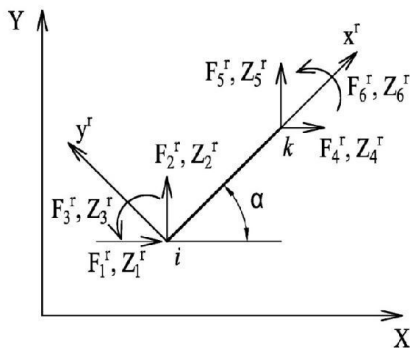


Рис.11.3

Связь между узловыми силами и перемещениями элемента в общей системе координат записывается следующим образом:

$$F^r = R^r \cdot Z^r, \quad (11.4)$$

где

$$R^r = (C^r)^T \cdot \bar{R}^r \cdot C^r. \quad (11.5)$$

Здесь F^r, \bar{R}^r – векторы узловых усилий и перемещений элемента в общей системе координат (глобальная система координат);

R^r – матрица жесткости элемента в общей системе координат;

C^r – матрица направляющих косинусов или матрица преобразования.

В соответствии с рис. 11.2 и рис.11.3 имеем

$$\sin \alpha^r = \frac{y_k - y_i}{l^r}; \quad \cos \alpha^r = \frac{x_k - x_i}{l^r};$$

$$l^K = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}.$$

Для каждого конечного элемента составляется матрица направляющих косинусов:

а) для жесткого узла

$$C_i^r = \begin{vmatrix} \cos \alpha^r & \sin \alpha^r & 0 \\ -\sin \alpha^r & \cos \alpha^r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (11.6)$$

б) для шарнирного узла

$$C_i^r = \begin{vmatrix} \cos \alpha^r & \sin \alpha^r \\ -\sin \alpha^r & \cos \alpha^r \end{vmatrix}; \quad (11.7)$$

в) для всего элемента

$$C_r = \begin{vmatrix} C_i^r \\ C_k^r \end{vmatrix}. \quad (11.8)$$

Для элемента с жесткими узлами матрица направляющих косинусов имеет вид

$$C^r = \begin{vmatrix} \cos \alpha^r & \sin \alpha^r & 0 & & & \\ -\sin \alpha^r & \cos \alpha^r & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos \alpha^r & \sin \alpha^r & 0 \\ & & & -\sin \alpha^r & \cos \alpha^r & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (11.9)$$

Для всех n узлов системы связь между векторами узловых усилий и перемещений будет

$$F = R \cdot Z, \quad (11.10)$$

где F, Z – векторы узловых усилий и перемещений системы;

R – матрица жесткости всей системы в общей системе координат, полученная путем сложения матриц жесткости отдельных элементов.

Если через R_p обозначить вектор грузовых реакций для всех узлов системы в общей системе координат, то условие равновесия соединенных элементов конструкции может быть записано в виде

$$F + R_p = 0. \quad (11.11)$$

На основании уравнений (11.10) и (11.11) получаем систему разрешающих уравнений

$$R \cdot \vec{Z} + \vec{R}_p = 0. \quad (11.12)$$

В результате решения системы уравнений (12) определяется вектор узловых перемещений

$$\vec{Z} = [R]^{-1} \cdot \vec{R}_p. \quad (11.13)$$

По векторам перемещений определяются векторы узловых усилий для элемента:

- в общей системе координат

$$F^r = R_p^r + R^r Z, \quad (11.14)$$

- в местной системе координат

$$\bar{F}^r = C^r \cdot F^r. \quad (11.15)$$

Затем по результатам расчетов строятся эпюры внутренних усилий $\bar{M}^r, \bar{Q}^r, \bar{N}^r$ для элементов.

Положительные значения усилий $\bar{M}^r(\bar{F}_3^r, \bar{F}_6^r)$ соответствуют действию момента на конце стержня против часовой стрелки, положительные значения усилий $\bar{N}^r(\bar{F}_1^r, \bar{F}_4^r)$ и $\bar{Q}^r(\bar{F}_2^r, \bar{F}_5^r)$ свидетельствуют, что их направление на конце стержня совпадает с положительным направлением осей x_r, y_r в местной системе координат.

11.2. Матрицы жесткости метода конечных элементов

Компонентом матрицы жесткости являются усилия, возникающие по концам стержня от их единичных смещений

$$\bar{R}^r = \begin{bmatrix} \bar{R}_{ii}^r & \bar{R}_{ik}^r \\ \bar{R}_{ki}^r & \bar{R}_{kk}^r \end{bmatrix}, \quad (11.16)$$

где \bar{R}_{ik}^r – обобщенная реакция в i -м узле конечного элемента от единичного смещения обобщенной связи k -го узла ($\bar{Z}_{ki}^r = 1$).

Размерность блоков \bar{R}_{ik}^r зависит от количества связей, например, для стержня с защемлением и шарниром на втором конце имеем:

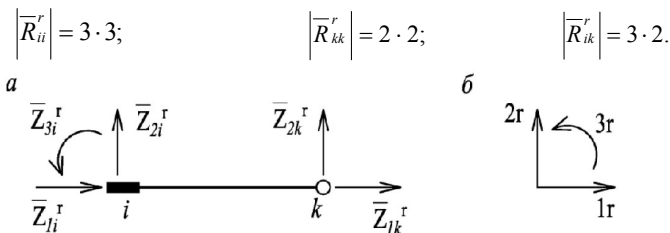


Рис. 11.4

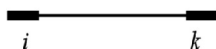


Рис. 11.5

Построим матрицу жесткости элемента, защемленного с двух сторон. Для этого определим усилия, возникающие по концам стержня, от единичных смещений наложенных на них связей (рис. 11.5).

а) Первое перемещение $\bar{Z}_{li}^r = 1$ (рис. 11.6).

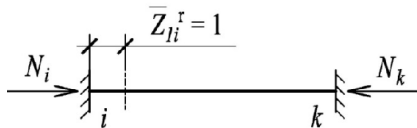


Рис. 11.6

Из уравнения $\frac{Nl}{EA} = 1$ получим $N_{ik} = \frac{EA}{l}$; $N_{ki} = -\frac{EA}{l}$.

Данное перемещение в других связях усилий не вызывает.

б) Второе перемещение $\bar{Z}_{2i}^r = 1$ (рис. 11.7). Для получения усилий в связях воспользуемся таблицей 8.1 метода перемещений (строка 4). Перемещение даем в положительном направлении оси 2.

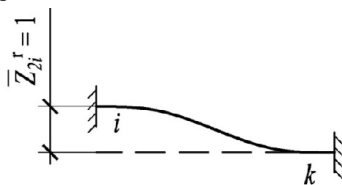


Рис. 11.7

$$m_{ik} = m_{ki} = 6 \frac{EI}{l^2}; \quad q_{ik} = q_{ki} = 12 \frac{EI}{l^3}.$$

в) Третье перемещение $\bar{Z}_{3i}^r = 1$, т. е. даем поворот против часовой стрелки защемлению на конце i (рис. 11.8).

Для определения реакций по концам воспользуемся табл. 8.1 (строка 3).

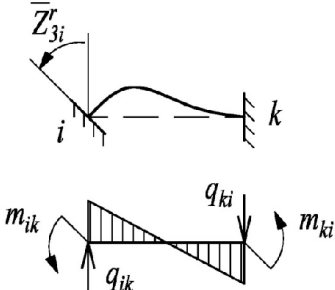


Рис. 11.8

$$\bar{Z}_{3i}^r = 1;$$

$$\bar{m}_{ik} = 4EI / l;$$

$$\bar{m}_{ki} = 2EI / l;$$

$$\bar{q}_{ik} = 6EI / l^2;$$

$$\bar{q}_{ki} = -6EI / l^2.$$

г) Четвертое перемещение на правом конце $\bar{Z}_{1k}^r = 1$ (рис. 11.9), результат этого перемещения получаем так же, как в пункте «а» – по закону Гука.

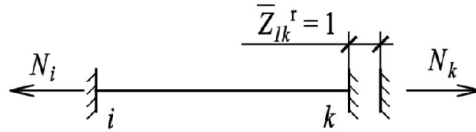


Рис. 11.9

Если $\bar{Z}_{lk}^r = 1$, то $N_i = -\frac{EA}{l}$;

$$N_k = \frac{EA}{l}.$$

д) Пятое перемещение $\bar{Z}_{2k}^r = 1$ (рис. 11.10).

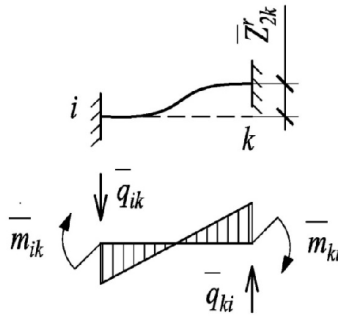


Рис. 11.10

$$\bar{Z}_{2k}^r = 1, \quad \bar{m}_{ik} = \bar{m}_{ki} = -6EI / l^2, \quad \bar{q}_{ik} = -12EI / l^3, \quad \bar{q}_{ki} = 12EI / l^3.$$

Здесь воспользовались табл. 8.1 (строка 4).

е) Шестое перемещение $\bar{Z}_{3k}^r = 1$ (рис. 11.11). Воспользуемся строкой 3 табл. 8.1.

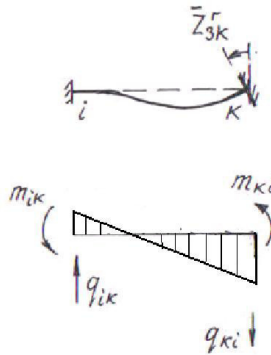


Рис. 11.11

$$\bar{Z}_{3k}^r = 1, \quad m_{ik} = 2EI / l, \quad m_{ki} = 4EI / l, \quad q_{ik} = 6EI / l^2, \quad q_{ki} = -6EI / l^2.$$

По полученным результатам формируем матрицу жесткости элемента с защемленными концами:

$$\bar{R}^r = \begin{bmatrix} \bar{R}_{ii}^r & \bar{R}_{ik}^r \\ \bar{R}_{ki}^r & \bar{R}_{kk}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} & 0 & -12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} & 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} & 0 & 12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} & 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (11.17)$$

Аналогично можно получить матрицу жесткости элемента с защемленным концом и шарниром на втором конце (рис. 11.4).

$$\bar{R}^r = \begin{bmatrix} \bar{R}_{ii}^r & \bar{R}_{ik}^r \\ \bar{R}_{ki}^r & \bar{R}_{kk}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 3\frac{EI}{l^3} & 3\frac{EI}{l^2} & 0 & -3\frac{EI}{l^3} \\ 0 & 3\frac{EI}{l^2} & 3\frac{EI}{l} & 0 & -3\frac{EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -3\frac{EI}{l^3} & -3\frac{EI}{l^2} & 0 & 3\frac{EI}{l^3} \end{bmatrix}. \quad (11.18)$$

Поясним физический смысл элементов матриц жесткости. Столбцы матриц сформированы как усилия во всех связях от последовательных единичных перемещений узлов конечного элемента. У стержня с двумя защемленными концами имеем 6 перемещений для двух узлов i и k . Для стержня с одним защемленным и вторым шарнирным концом имеем 5 перемещений – 3 перемещения на защемленном и 2 – на шарнирном конце. Например, первый столбец показывает усилия во всех связях от $\bar{Z}_{1i}^r=1$ (табл. 11.1). Второй столбец – усилия во всех связях от перемещения $\bar{Z}_{2i}^r=1$. Остальные столбцы заполняются аналогично.

Таблица 11.1

$\bar{Z}_{1i}^r = 1$	$\bar{Z}_{2i}^r = 1$	$\bar{Z}_{3i}^r = 1$	$\bar{Z}_{1k}^r = 1$	$\bar{Z}_{2k}^r = 1$	$\bar{Z}_{3k}^r = 1$	Концевые усилия
$\frac{EA}{l}$	0					\bar{F}_{1i}^r
0	$12 \frac{EI}{l^3}$					\bar{F}_{2i}^r
0	$6 \frac{EI}{l^2}$					\bar{F}_{3i}^r
$-\frac{EA}{l}$	0					\bar{F}_{1k}^r
0	$-12 \frac{EI}{l^2}$					\bar{F}_{2k}^r
0	$6 \frac{EI}{l^2}$					\bar{F}_{3k}^r

11.3. Вектор грузовых усилий (реакций) по концам стержней в местной системе координат

При расчете рам рассматриваемым методом за неизвестные принимаются линейные и угловые перемещения узлов рамы; внешнюю нагрузку также считают приложенной в узлах. Если нагрузка внеузловая, то при определении перемещений узлов ее всегда можно заменить узловой. Напряженное состояние системы будет таким же, как и при внеузловой нагрузке, за исключением загруженных стержней. Чтобы получить напряженное состояние, соответствующее внеузловой нагрузке, надо эпюры усилий, полученные от узловой нагрузки, сложить с эпюрами усилий, учитывающими местное нагружение.

Для определения узловых усилий следует использовать формулы для реакций в статически неопределимых стержнях от различных воздействий. Например, для рамы, изображенной на рис. 11.12, распределенная нагрузка может быть заменена узловой, как показано на рис. 11.13. При этом силы и моменты, действующие на узлы i и k , будут по величине равны реакциям в стержне ik основной системы метода перемещений (рис. 11.14, a) и противоположно направлены.

Величина их показана на рис. 11.14, b и определена решением статически неопределимой балки ik методом сил. Такие решения проведены

для балок разных типов при различных загрузках и сведены в табл. 8.2 (глава 8) метода перемещений. Для балки ik реактивные усилия можно взять непосредственно из табл. 8.2 (строка 3). Реактивные усилия для балки с одним защемленным, вторым шарнирным концом приведены на рис. 11.15. От сосредоточенной силы P – на рис. 11.16, а и 11.16, б.

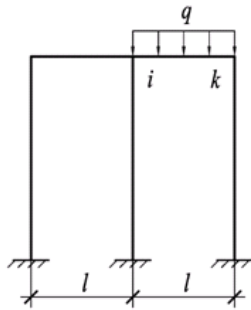


Рис. 11.12

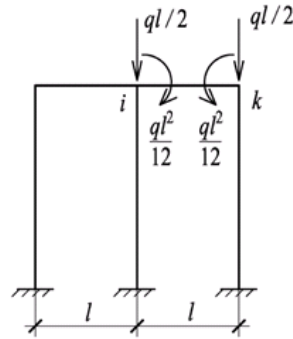
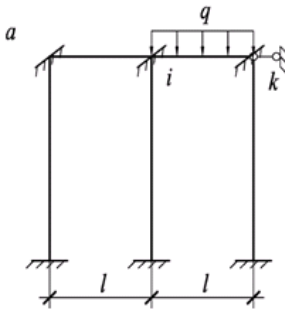


Рис. 11.13



б

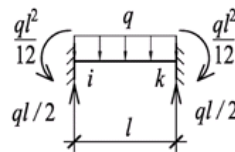


Рис. 11.14

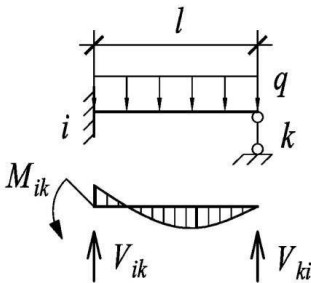
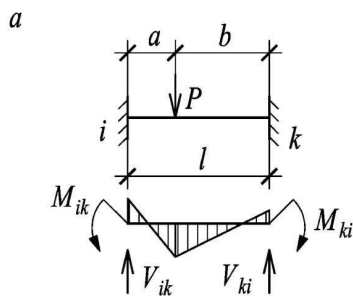


Рис. 11.15

$$M_{ik} = ql^2/8;$$

$$V_{ik} = \frac{5}{8}ql;$$

$$V_{ki} = \frac{3}{8}ql.$$



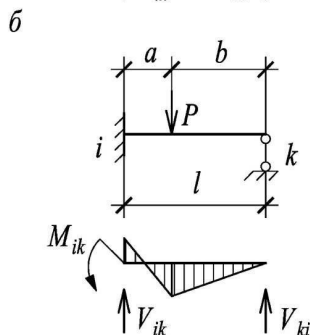
$$M_{ik} = P \frac{ab^2}{l^2};$$

$$M_{ki} = -P \frac{a^2b}{l^2};$$

$$V_{ik} = \frac{Pb^2}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{2a}{l}\right);$$

$$V_{ki} = P \frac{a^2}{l^2} \cdot \left(1 + \frac{2b}{l}\right).$$

(формулы – табл. 8.2 строка 4).



$$M_{ik} = Pb \cdot \frac{(l^2 - b^2)}{2l^2};$$

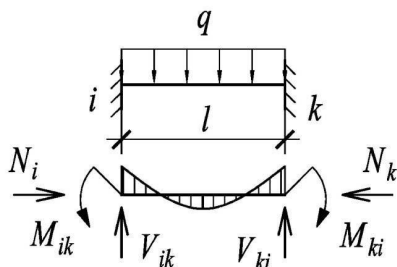
$$V_{ik} = \frac{Pb \cdot (3l^2 - b^2)}{2l^3};$$

$$V_{ki} = \frac{Pa^2 \cdot (3l - a)}{2l^3}.$$

(формулы – табл. 8.2 строка 2).

Рис. 11.16

Вектор грузовых усилий составляется из реакций по концам стержней и для стержня *ik* приведен на рис. 11.17.



$$\overline{R}_{ip}^r = \begin{vmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \end{vmatrix};$$

$$\overline{R}_{kp}^r = \begin{vmatrix} N_k \\ V_k \\ M_k \end{vmatrix}.$$

Рис. 11.17

11.4. Порядок расчета рам

- Стержневую систему разбивают на элементы, нумеруют узлы и элементы, концы стержней. Указывают неизвестные перемещения.
- Определяют геометрические характеристики отдельных элементов.
- Составляют вектор узловых перемещений конструкции в общей системе координат

$$Z = [Z_{11} \ Z_{12} \ Z_{13} \ Z_{21} \ Z_{22} \ Z_{23}]^T,$$

где индекс «Т» означает операцию транспонирования.

• Устанавливают координаты узлов в общей системе координат. Находят направляющие косинусы элементов по выражениям

$$\cos \alpha = \frac{x_k - x_i}{l}; \quad \sin \alpha = \frac{y_k - y_i}{l}.$$

• Формируют матрицы направляющих косинусов C^r .
• Формируют матрицы жесткости элементов в местной системе координат \bar{R}^r .

• Вычисляют матрицы жесткости элементов в общей системе координат

$$R^r = (C^r)^T \cdot \bar{R}^r \cdot C^r.$$

• Составляют матрицы грузовых усилий по концам стержней \bar{R}^r_{ip} в местной системе и производят вычисления для общей системы координат:

$$R^r_{ip} = (C^r)^T \cdot \bar{R}^r_{ip}.$$

• Составляют каноническое уравнение для всей системы

$$R \cdot \bar{Z} + R_p = 0,$$

после которого находят неизвестные перемещения $Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{21}, Z_{22}, Z_{23}$ и показывают деформированный вид системы.

• Вычисляют узловые усилия, действующие на отдельные конечные элементы в общей системе координат

$$F^r = R^r \cdot Z^r.$$

• Вычисляют усилия, действующие на отдельные конечные элементы в местной системе координат

$$F^r = C^r \cdot F^r.$$

• По полученным данным строят эпюры внутренних усилий M, Q, N .

При построении эпюр для элементов, нагруженных внешними силами, значения внутренних силовых факторов устанавливают как сумму узловых усилий по концам стержней в местной системе координат и усилий от внешней нагрузки.

• Выполняют проверку правильности расчета.

Пример 11.1

Для заданной рамы требуется произвести расчет рамы методом конечных элементов, построить эпюры внутренних силовых факторов (рис. 11.18).

Нагрузка известна, стержни изготовлены из двутавра.

$$P = 10 \text{ кН}; \quad q = 20 \text{ кН/м.}$$

$$I \text{ № } 60;$$

$$I = 7,68 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4; \quad A = 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$E = 200 \text{ ГПа}; \quad EA = 17,97 \text{ ЕИ.}$$

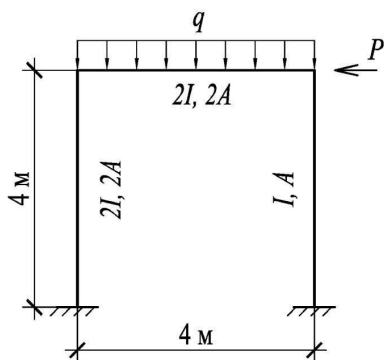


Рис.11.18

Решение

1. Разбиваем систему на конечные элементы, нумеруем узлы, элементы, концы стержней и показываем неизвестные перемещения.

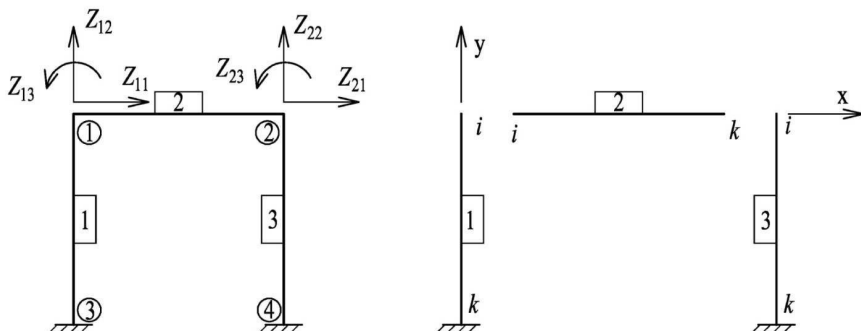


Рис. 11.19

2. Вектор узловых перемещений в общей системе координат:

$$Z = [Z_{11} \ Z_{12} \ Z_{13} \ Z_{21} \ Z_{22} \ Z_{23}]^T.$$

3. Координаты узлов и направляющие косинусы

Таблица 11.2

№ стержня	Узлы	$x_k - x_i$	$y_k - y_i$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	1 - 3	0	-4	0	-1
2	1 - 2	4	0	1	0
3	2 - 4	0	-4	0	-1

$$\cos \alpha = \frac{x_k - x_i}{l}; \quad \sin \alpha = \frac{y_k - y_i}{l}.$$

$$\cos \alpha = \frac{x_k - x_i}{l}; \quad \sin \alpha = \frac{y_k - y_i}{l}.$$

4. Характеристики элементов.

Вычисляем матрицы жесткости элементов в местной и в общей системе координат

Первый конечный элемент

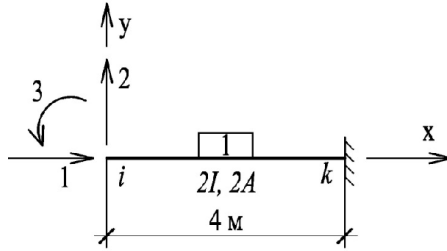


Рис. 11.20

$$\bar{R}^{(1)} = |R_{ii}|;$$

$$\frac{EA}{l} = \frac{17,97EI}{4} = 4,492EI;$$

$$12 \frac{EI}{l^3} = \frac{12}{64} EI = 0,188EI;$$

$$4 \frac{EI}{l} = \frac{4}{4} EI = EI;$$

$$6 \frac{EI}{l^2} = \frac{6}{16} EI = 0,375EI;$$

$$2 \frac{EI}{l} = \frac{2}{4} EI = 0,500EI.$$

Матрица жесткости 1-го элемента в местной системе координат:

$$\bar{R}^{(1)} = \begin{vmatrix} 4,492 & 0 & 0 \\ 0 & 0,188 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 1 \end{vmatrix},$$

матрица направляющих косинусов:

$$C^r = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица жесткости 1-го элемента в общей системе координат

$$R^{(1)} = (C^r)^T \cdot \bar{R}^{(1)} \cdot C^r;$$

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 2EI \cdot \begin{vmatrix} 4,492 & 0 & 0 \\ 0 & 0,188 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= EI \cdot \begin{vmatrix} 0,376 & 0 & 0,750 \\ 0 & 8,984 & 0 \\ 0,750 & 0 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Второй конечный элемент

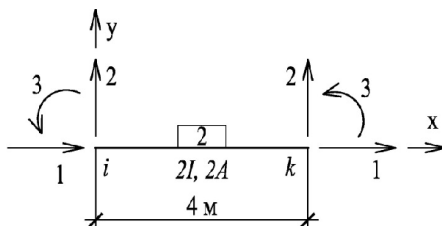


Рис. 11.21

$$\bar{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(2)} \\ R_{21}^{(1)} & R_{22}^{(2)} \end{bmatrix};$$

$$\frac{EA}{l} = \frac{17,97EI}{4} = 4,492EI;$$

$$12 \frac{EI}{l^3} = \frac{12}{64} EI = 0,188EI;$$

$$6 \frac{EI}{l^2} = \frac{6}{16} EI = 0,375EI;$$

$$4 \frac{EI}{l} = \frac{4}{4} EI = EI;$$

$$2 \frac{EI}{l} = \frac{2}{4} EI = 0,500EI.$$

Матрица жесткости 2-го элемента в местной системе координат

$$\begin{aligned} \bar{R}^{(2)} &= 2EI \cdot \begin{vmatrix} 4,492 & 0 & 0 & -4,492 & 0 & 0 \\ 0 & 0,188 & 0,375 & 0 & -0,188 & 0,375 \\ 0 & 0,375 & 1 & 0 & -0,375 & 0,500 \\ -4,492 & 0 & 0 & 4,492 & 0 & 0 \\ 0 & -0,188 & -0,375 & 0 & 0,188 & -0,375 \\ 0 & 0,375 & 0,500 & 0 & -0,375 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= EI \cdot \begin{vmatrix} 8,984 & 0 & 0 & -8,984 & 0 & 0 \\ 0 & 0,376 & 0,750 & 0 & -0,376 & 0,750 \\ 0 & 0,750 & 2 & 0 & -0,750 & 1 \\ -8,984 & 0 & 0 & 8,984 & 0 & 0 \\ 0 & -0,376 & -0,750 & 0 & 0,376 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 1 & 0 & -0,750 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица направляющих косинусов

$$C^{(2)} = \begin{vmatrix} C_i^{(2)} & C_k^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица жесткости 2-го элемента в общей системе координат

$$R^{(2)} = (C^{(2)})^T \cdot \overline{R}^{(2)} \cdot C^r =$$

$$= EI \cdot \begin{vmatrix} 8,984 & 0 & 0 & -8,984 & 0 & 0 \\ 0 & 0,376 & 0,750 & 0 & -0,376 & 0,750 \\ 0 & 0,750 & 2 & 0 & -0,750 & 1 \\ -8,984 & 0 & 0 & 8,984 & 0 & 0 \\ 0 & -0,376 & -0,750 & 0 & 0,376 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 1 & 0 & -0,750 & 2 \end{vmatrix}.$$

Третий конечный элемент

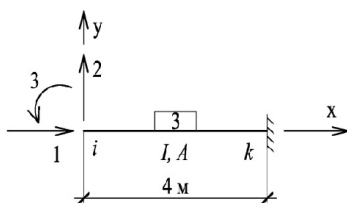


Рис. 11.22

Для третьего конечного элемента матрица жесткости аналогична матрице первого конечного элемента, только числовые значения в два раза меньше:

$$R^{(3)} = EI \cdot \begin{vmatrix} 0,188 & 0 & 0,375 \\ 0 & 4,492 & 0 \\ 0,375 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Матрица грузовых усилий по концам стержней

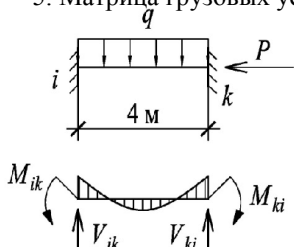


Рис. 11.23

$$M_{ik} = \frac{ql^2}{12} = \frac{20 \cdot 4^2}{12} = 26,67 \text{ кНм};$$

$$M_{ki} = -\frac{ql^2}{12} = -26,67 \text{ кНм};$$

$$V_{ik} = V_{ki} = \frac{ql}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40 \text{ кН};$$

$$N_{ik} = 0; \quad N_{ki} = -P = -10 \text{ кН}.$$

Матрица усилий второго конечного элемента в местной системе координат

$$\bar{R}_p^{(21)} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{ip}^{(2)} \\ \bar{R}_{kp}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{ik} \\ V_{ik} \\ M_{ik} \\ N_{ki} \\ V_{ki} \\ M_{ki} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \\ 26,67 \\ -10 \\ 40 \\ -26,67 \end{Bmatrix}.$$

И в общей системе координат

$$R_p^{(2)} = C^{(2)} \cdot \bar{R}_p^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \\ 26,67 \\ -10 \\ 40 \\ -26,67 \end{Bmatrix}.$$

$R_p^{(1)} = R_p^{(3)} = 0$, так как стрелы 1 и 3 не нагружены (по методу перемещений)

6. Каноническое уравнение МКЭ

$$R \cdot \vec{Z} + R_p = 0;$$

$$\vec{Z} = [Z_{11} \ Z_{12} \ Z_{13} \ Z_{21} \ Z_{22} \ Z_{23}]^T.$$

7. Составим матрицу жесткости в общей системе координат для всех элементов

$$R = \begin{Bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (R_{11}^{(1)} + R_{11}^{(2)}) & R_{12} \\ R_{21} & (R_{22}^{(2)} + R_{22}^{(3)}) \end{Bmatrix}.$$

$$R = 1,536 \cdot 10^5 \cdot \begin{Bmatrix} 9,360 & 0 & 0,750 & -8,984 & 0 & 0 \\ 0 & 9,360 & 0,750 & 0 & -0,376 & 0,750 \\ 0,750 & 0,750 & 4 & 0 & -0,750 & 1 \\ -8,984 & 0 & 0 & 9,172 & 0 & 0,375 \\ 0 & -0,376 & -0,750 & 0 & 4,868 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 1 & 0,375 & -0,750 & 3 \end{Bmatrix}.$$

8. После решения разрешающего уравнения

$$1,536 \cdot 10^{-5} \cdot \begin{vmatrix} 9,360 & 0 & 0,750 & -8,984 & 0 & 0 \\ 0 & 9,360 & 0,750 & 0 & -0,376 & 0,750 \\ 0,750 & 0,750 & 4 & 0 & -0,750 & 1 \\ -8,984 & 0 & 0 & 9,172 & 0 & 0,375 \\ 0 & -0,376 & -0,750 & 0 & 4,868 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 1 & 0,375 & -0,750 & 3 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \\ Z_{13} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \\ Z_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 40 \\ 26,67 \\ -10 \\ 40 \\ -26,67 \end{vmatrix} = 0.$$

получаем $Z_{11} = -10,9 \cdot 10^{-5} \text{ м};$ $Z_{21} = -11,6 \cdot 10^{-5} \text{ м};$
 $Z_{12} = -3,26 \cdot 10^{-5} \text{ м};$ $Z_{22} = -5,8 \cdot 10^{-5} \text{ м};$
 $Z_{13} = -4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$ $Z_{23} = 8,35 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$

9. Проверка правильности решения системы уравнений

* по первой строке

$$9,36 \cdot (-10,9) + 0 + 0,75 \cdot (-4,5) - 8,984 \cdot (11,6) + 0 + 0 = 105,38 - 104,2 \neq 0.$$

Погрешность 1,1 %;

* по второй строке

$$(9,36 \cdot (-3,27) + 0,75 \cdot (-4,8) - 0,376 \cdot (-5,6) + 0,75 \cdot (8,35)) = 1,536 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-5} + 40 = 40 - 40 = 0.$$

10. Схематизированное изображение деформирования рамы

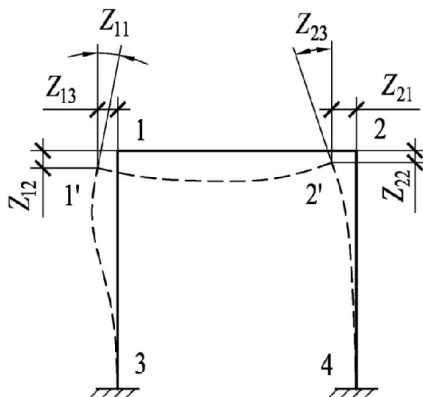


Рис. 11.24

11. Вычисляем узловые усилия, действующие на отдельные элементы в общей системе координат:

$$F^{(1)} = R^{(1)} \cdot Z^{(1)}.$$

$$F^{(1)} = 1,536 \cdot 10^5 \cdot \begin{vmatrix} 0,376 & 0 & 0,750 \\ 0 & 8,984 & 0 \\ 0,750 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -10,9 \\ -3,26 \\ -4,5 \end{vmatrix} \cdot 10^5 = \begin{vmatrix} -11,6 \\ -44,9 \\ -26,6 \end{vmatrix}.$$

$$F^{(2)} = R^{(2)} \cdot Z_2.$$

$$F^{(2)} = 1,536 \cdot 10^5 \cdot \begin{vmatrix} 8,984 & 0 & 0 & -8,984 & 0 & 0 \\ 0 & 0,376 & 0,750 & 0 & -0,376 & 0,750 \\ 0 & 0,750 & 2 & 0 & -0,750 & 1 \\ -8,984 & 0 & 0 & 8,984 & 0 & 0 \\ 0 & -0,376 & -0,750 & 0 & 0,376 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 1 & 0 & -0,750 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -10,9 \\ -3,26 \\ -4,5 \\ -11,6 \\ -5,8 \\ 8,35 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{vmatrix} 11,708 \\ 4,485 \\ -0,059 \\ -11,708 \\ -4,485 \\ 20,067 \end{vmatrix}.$$

$$F^{(3)} = R^{(3)} \cdot Z^{(3)}.$$

$$F^{(3)} = 1,536 \cdot 10^5 \cdot \begin{vmatrix} 0,188 & 0 & 0,375 \\ 0 & 4,492 & 0 \\ 0,375 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -11,6 \\ -5,8 \\ 8,35 \end{vmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{vmatrix} 1,36 \\ -34,98 \\ -6,6 \end{vmatrix}.$$

12. Вычисляем усилия, действующие на отдельные элементы в местной системе координат:

$$\bar{F}^{(1)} = \bar{C}^{(1)} \cdot F^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -11,6 \\ -44,9 \\ -26,6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 44,98 \\ -11,63 \\ -26,61 \end{vmatrix}.$$

$$\bar{F}^{(2)} = \bar{C}^{(2)} \cdot F^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11,708 \\ 4,485 \\ -0,059 \\ -11,708 \\ -4,485 \\ 20,067 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11,708 \\ 4,485 \\ -0,059 \\ -11,708 \\ -4,485 \\ 20,069 \end{vmatrix}.$$

$$\bar{F}^{(3)} = \bar{C}^{(3)} \cdot F^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1,63 \\ -34,98 \\ -6,6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34,98 \\ 1,63 \\ 6,6 \end{vmatrix}.$$

13. Построение эпюр внутренних усилий.

Первый конечный элемент

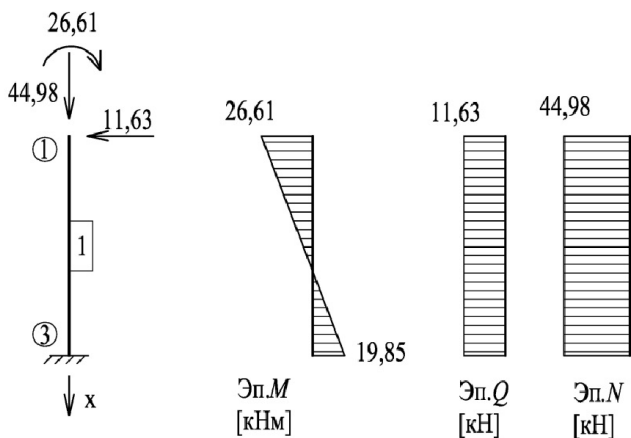
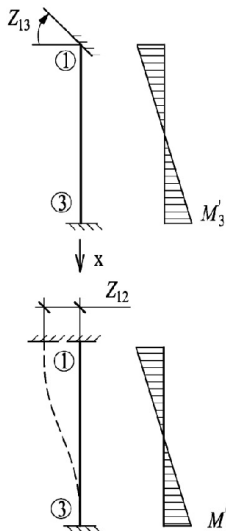


Рис. 11.25

Момент в защемлении (опоре 3) найдем, учитывая смещения концов стержня по методу перемещений:



$$M'_3 = \frac{2EI}{l} \cdot Z_{13} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 153,6 \cdot 10^3}{4} \times \\ \times 4,5 \cdot 10^{-5} = 6,4 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$M''_3 = \frac{6EI}{l} \cdot Z_{12} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 153,6 \cdot 10^3}{16} \times \\ \times 11,6 \cdot 10^{-5} = 13,45 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Рис. 11.26

Второй конечный элемент

Для второго стержня значений внутренних силовых факторов установим суммированием усилий по концам стержней в местной системе координат и узловых усилий от внешней нагрузки (рис. 11.27):

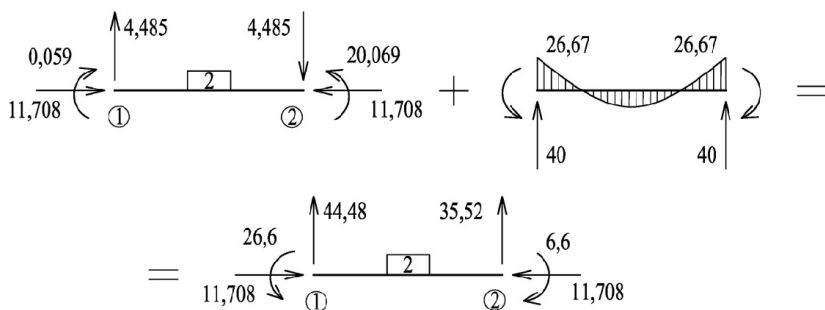
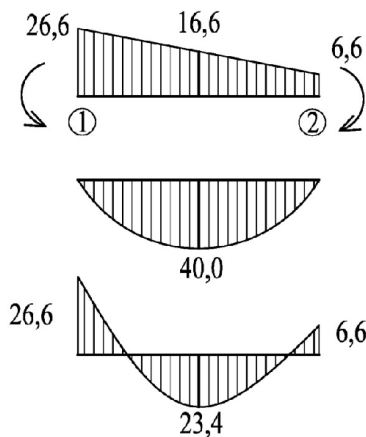


Рис. 11.27

В сечениях второго стержня значений изгибающих моментов устанавливаем путем суммирования усилий по концам стержня и усилий от внешней нагрузки.



$$\frac{26,6 + 6,6}{2} = 16,6 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{20 \cdot 16}{8} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Эпюра M, кН·м.

Рис. 11.28

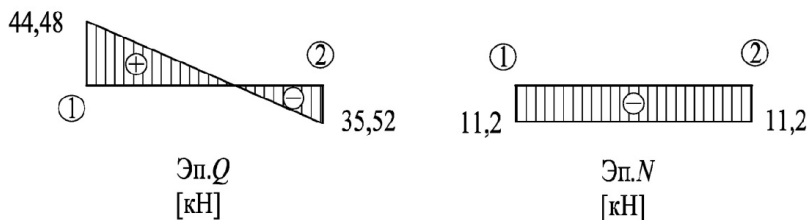


Рис. 11.29

Третий конечный элемент

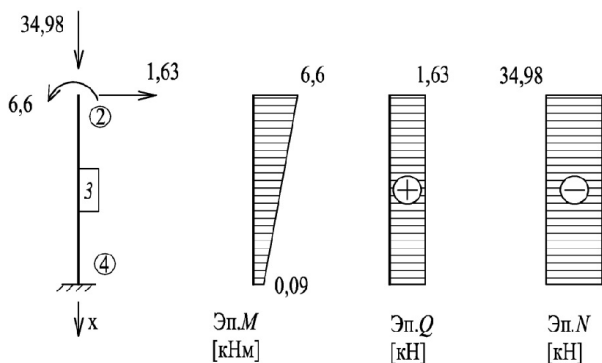


Рис. 11.30

Момент в опорном узле 4 находим аналогично узлу 3. $M_4 = -0,09$ кН·м.

14. Эпюры внутренних усилий для всей системы

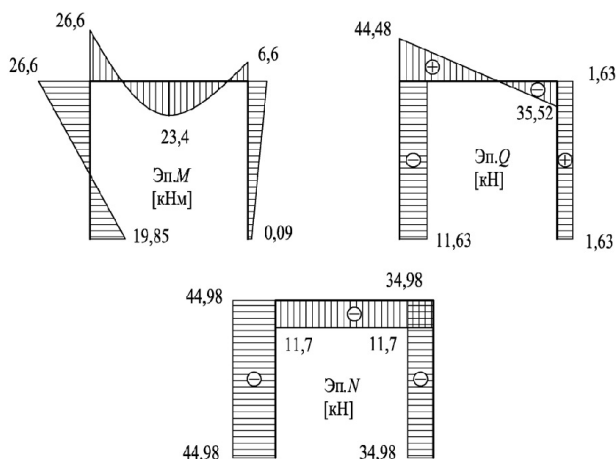


Рис. 11.31

15. Проверка правильности решения.

Рассматриваем равновесие отсеченной части рамы (рис. 11.32), составляем уравнения статики:

$$\sum x = 11,63 - 10 - 11,63 = 0;$$

$$\sum y = 44,98 + 34,98 - 20 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum m_4 = 20 \cdot 4 \cdot 2 - 19,85 - 44,98 \cdot 4 + 10 \cdot 4 - 0,09 = 200 - 199,2 = 0.$$

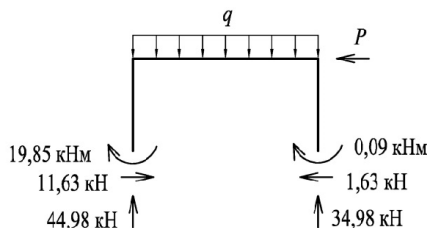


Рис. 11.32

Из уравнений видно, что отсеченная часть находится в равновесии, что означает правильность эпюр.

В примере 11.1 приведен алгоритм расчета рамы методом конечных элементов и все процедуры расчета проделаны вручную. Этот же алгоритм заложен в компьютерные программы, и ввод исходных данных включает только характеристики конечных элементов и нагрузок. Один из алгоритмов расчета применительно к ПК приводится ниже.

11.5. Расчет рам методом конечных элементов с использованием ПК*

Подготовка исходных данных

- Разбиваем расчетную систему на конечные элементы, нумеруем стержни и узлы.
- Вводим общую систему координат.
- Вычисляем геометрические характеристики стержней: жесткости EI и EA и их соотношение EI/EA .
- Определяем тип нагрузки, ее величину и направление. Различают узловые и местные нагрузки. Положительный знак узловой нагрузки означает, что сосредоточенная сила совпадает с направлением соответствующей координатной оси, а сосредоточенный момент в узле направлен против часовой стрелки. Местная сосредоточенная сила или распределенная нагрузка также считается положительной, если она совпадает с направлением соответствующей оси. Для местных нагрузок кроме указания типа, величины и знака приводятся их привязка к началу стержня и длина распределения.

Ниже приведены типы нагрузок, используемые в программе:

* Методика расчета МКЭ применительно к ПК изложена в работе профессора В. Н. Алехина и доцента А. А. Чусовитина «Расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов» (1992).

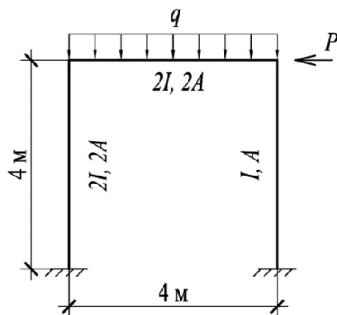


Рис. 11.33

Согласование ограничений, связанных с оперативной памятью ПК.

При решении на ПК указываются:

- Число стержней, узлов, опорных закреплений, модуль упругости материала. Учитываются закрепления в опорном узле по осям x , y и от поворота.

Единицы измерения могут быть любыми, но одинаковыми для силовых и линейных факторов (например: кН; м; кН/м;...).

Ввод строки должен заканчиваться <BK> или <Enter>.

- Указываются номера узлов и их координаты по осям x , y .
- Приводится информация о стержнях. Указывается номер стержня, номер узла, начала, номер узла конца, момент инерции и площадь сечения.
- Приводится информация об опорных узлах. Указывается номер опорного узла, подтверждаются его закрепление (если он закреплен) и наличие закрепления по осям x , y и от поворота.
- Приводится информация о нагрузках. Указывается число загруженных узлов, по каждому загруженному узлу, его номер, тип нагрузки и ее величина с учетом знака.

Отмечается число загруженных стержней, по каждому загруженному стержню приводится его номер, число нагрузок на стержне, их тип, интенсивность, привязка к началу стержня и длина распределения.

После проверки правильности ввода дается команда для решения задачи.

В результатах расчета приводятся данные по перемещению узлов (линейные в направлении осей x , y и угловые), усилия по концам стержней (продольная и поперечная силы и изгибающий момент) и величина опорных реакций.

По результатам перемещений узлов строят схематизированный вид деформированной рамы, по результатам усилий на концах стержней выполняют эпюры M , Q и N .

Эпюры изгибающих моментов строят по значениям концевых моментов, а пролетные моменты определяют методами строительной механики (как результат совместного действия на стержень концевых моментов и местной нагрузки). За положительное значение момента принимается момент, действующий на стержень против часовой стрелки, а положительные направления поперечной и продольной сил совпадают с положительными направлениями соответствующих осей местной системы координат.

Пример 11.2

Расчет рамы с использованием ПК

Задана расчетная схема рамы (рис. 11.34).

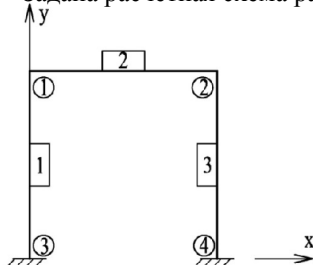


Рис. 11.34

Исходные данные:

I № 60

$q = 20 \text{ кН/м}$, $P = 10 \text{ кН}$,

$E = 200 \text{ ГПа}$.

Решение

Разбиваем расчетную схему рамы на конечные элементы, нумеруем узлы и элементы, вводим общую систему координат.

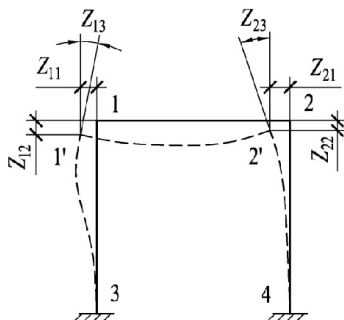


Рис. 11.35

Из сортамента для двутавра № 60 находим его геометрические характеристики.

$$I = 0,000768 \text{ м}^4;$$

$$A = 0,0138 \text{ м}^2.$$

Готовим данные для решения задачи.

Таблица 11.3

Запросы ПК	Ответы пользователя
<i>1. Информация о системе</i>	
Число стрижней.....?	3
Число узлов.....?	4
Число опорных узлов.....?	2
Число опорных закреплений.....?	6
Модуль упругости материала.....?	2Е8
<i>2. Координаты узлов</i>	
Узел № 1	
x– координата.....?	0
y – координата.....?	4
Узел № 2	
x– координата.....?	4
y – координата.....?	4
Узел № 3	
x – координата.....?	0
y – координата.....?	0

Продолжение табл. 11.3

Запросы ПК	Ответы пользователя
Узел № 4	
x – координата.....?	4
y – координата.....?	0
<i>3. Информация о стержнях</i>	
<u>Стержень 1</u>	
Номер узла начала.....?	1
Номер узла конца.....?	3
Момент инерции сечения.....?	0,001536
Площадь сечения.....?	0,0276
<u>Стержень 2</u>	
Номер узла начала.....?	1
Номер узла конца.....?	2
Момент инерции сечения.....?	0,001536
Площадь сечения.....?	0,0276
<u>Стержень 3</u>	
Номер узла начала.....?	2

Номер узла конца.....?	4
Момент инерции сечения.....?	0,000768
Площадь сечения.....?	0,01338
<i>4. Опорные крепления</i>	
(0 – узел не закреплен, 1 – узел закреплен)	
Опорный узел №.....?	3
Закрепление по оси х: (0 или 1).....?	1
Закрепление по оси у: (0 или 1).....?	1
Закрепление от поворота: (0 или 1).....?	1
Опорный узел №.....?	4
Закрепление по оси х: (0 или 1).....?	1
Закрепление по оси у: (0 или 1).....?	1
Закрепление от поворота: (0 или 1).....?	1
<i>5. Нагрузки</i>	
Число загруженных узлов.....?	1
Загруженный узел №.....?	2
Сила по оси х.....?	-10
Сила по оси у.....?	0
Момент.....?	0
Число загруженных стержней.....?	1

Окончание табл. 11.3

Запросы ПК	Ответы пользователя
Загруженный узел №.....?	2
Число нагрузок на стержень.....?	1
Нагрузка №.....?	1
Типа нагрузки.....?	2
Интенсивность.....?	-20
Привязка к началу стержня.....?	0
Длина распределения.....?	4

Результаты расчета на ПК

Таблица 11.4

Перемещения узлов

Узел	X	У	Поворот
1	-1,05 E - 04	-3,27 E – 05	-4,8 E – 05
2	-1,13 E – 04	-5,06 E – 05	8,35 E – 05
3	0,00 E + 00	0,00 E + 00	0,00 E + 00

4	0,00 E + 00	0,00 E + 00	0,00 E + 00
---	-------------	-------------	-------------

Таблица 11.5

Усилия по концам стержней

	Продольная сила	Поперечная сила	Момент
Стержень 1			
Начало	4,51 E + 01	-1,16 E + 01	-2,68 E + 01
Конец	-4,51 E + 01	1,16 E + 01	-1,94 E + 01
Стержень 2			
Начало	1,16 E + 01	4,51 E + 01	2,68 E + 01
Конец	-1,16 E + 01	3,49 E + 01	-6,32 E + 00
Стержень 3			
Начало	3,49 E + 01	1,56 E + 00	6,32 E + 00
Конец	-3,49 E + 01	-1,56 E + 00	-9,25 E - 02

Таблица 11.6

Опорные реакции

Узел	X	Y	M
3	1,16 E + 01	4,51 E + 01	-1,94 E + 01
4	-1,56 E + 00	3,49 E + 01	-9,25 E - 02

Деформированный вид рамы:

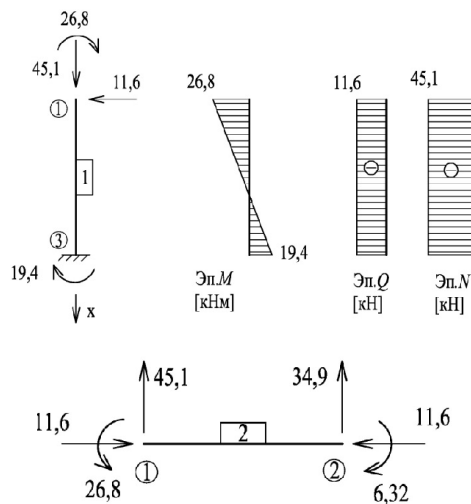


Рис. 11.36

Эпюры внутренних усилий в стержнях по данным машинного счета:
(рис. 11.36, 11.37, 11.38).

Первый конечный элемент

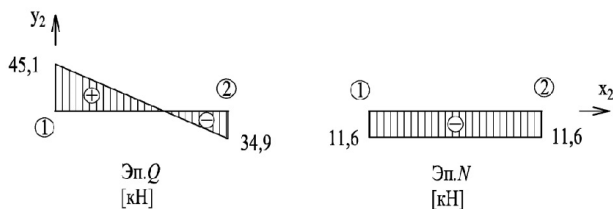


Рис. 11.37

Второй конечный элемент

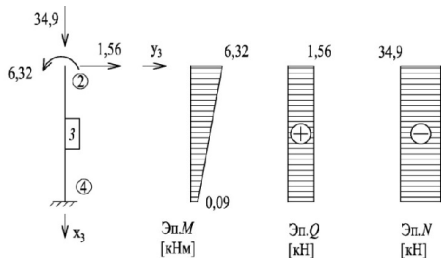


Рис. 11.38

В сечениях второго стержня значения изгибающих моментов устанавливаем путем суммирования усилий по концам стержней и усилий от внешней нагрузки:

$$\frac{28,8 + 6,32}{2} = 16,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{20 \cdot 16}{8} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$40 - 16,56 = 23,44 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

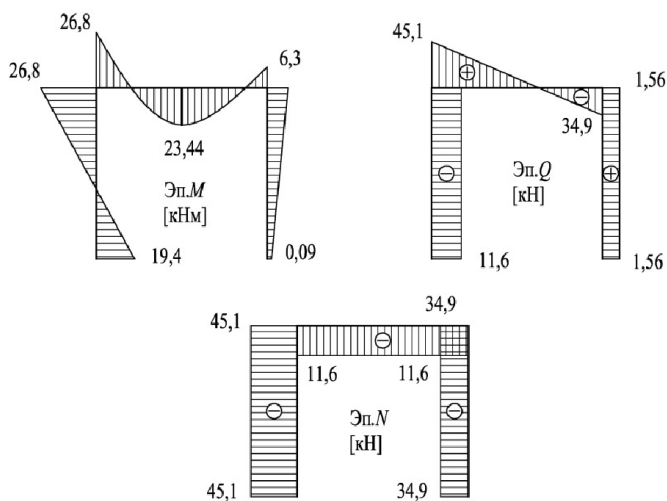


Рис. 11.39

Третий конечный элемент

эпюра M , кН·м эпюра Q , кН эпюра N , кН

Рис. 11.40

Строим эпюры внутренних усилий для всей рамы

эпюра M , кН·м

эпюра Q , кН

эпюра N , кН

Рис. 11.41

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. В. Строительная механика : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, В. Б. Зылев. Часть 1. М. : Высшая школа, 2007. 703 с.
2. Александров А. В. Строительная механика. Динамика и устойчивость : Кн. 2 / А. В. Александров, В. Д. Потапов, В. Б. Зылев. М. : Высшая школа, 2008. 384 с.
3. Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов вузов. Ч. 1. Плоские статически определимые стержневые системы / Н. Н. Анохин. М. : АСВ, 1999. 335 с.
4. Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах : учеб. пособие для студентов вузов. Ч. 2. Статически неопределимые системы. М. : АСВ, 2007. 464 с.
5. Дарков А. В. Строительная механика / А. В. Дарков. Изд. 12-е, стер. СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2010. 656 с.
6. Клейн Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн [и др.]. М. : Высшая школа, 1980. 384 с.
7. Климанов В. И. Расчет стержневых систем методами перемещений и распределения моментов / В. И. Климанов. Свердловск : УПИ. 1989. 80 с.
8. Климанов В. И. Устойчивость стержневых и тонкостенных систем / В. И. Климанов. Свердловск : УПИ. 1988. 80 с.
9. Киселев В. А. Строительная механика. Общий курс / В. А. Киселев. М. : Стройиздат, 1986. 520 с.
10. Потапов В. Д. Строительная механика. Кн. 1. Статика упругих систем / В. Д. Потапов, А. В. Александров. М. : Высшая школа, 2007. 511 с.
11. Рогицкий С. А. Новый метод расчета на прочность и устойчивость / С. А. Рогицкий. Свердловск : Урало-сибирское отделение машгиза, 1961. 352 с.
12. Саргсян А. Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / А. Е. Саргсян, А. Т. Демченко, Н. В. Дворянчиков, Г. А. Джинчвелашвили. М. : Высшая школа. 2009. 475 с.
13. Смирнов А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров. М. : Стройиздат. 1984. 416 с.
14. Алехин В. Н. Расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов : методические указания / В. Н. Алехин, А. А. Чусовитин. Екатеринбург : УПИ, 1992. 14 с.
15. Поляков А. А. Соппротивление материалов : учебное пособие / А. А. Поляков. Екатеринбург : УрФУ, 2011. 335 с.
16. Юсупов А. К. Методы прикладной математики в строительной механике : в 4 т. / А. К. Юсупов. Махачкала : ДагГТУ, 2008. 1471 с.

Учебное издание

Поляков Алексей Афанасьевич
Лялина Фарида Галиевна
Игнатов Роберт Георгиевич

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Редактор *В.О. Корионова*
Н.В. Рощина

Подписано в печать 12.07.2016. Формат 70×100/16.
Бумага типографская. Офсетная печать. Усл. печ. л. 28,0.
Уч.-изд. л. 33,9. Тираж 200 экз. Заказ № 567.7.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в типографии
ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф.2
Тел.: 8 (343) 362-91-16